ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 11 FÉVRIER 1946.

PRÉSIDENCE DE M. ÉLIE CARTAN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** donne lecture du décret, en date du 20 janvier 1946, publié au *Journal Officiel de la République française*, portant approbation de l'élection que l'Académie a faite de M. **Paul Pascal** pour occuper, dans la Section de Chimie, la place vacante par le décès de M. *Marc Tiffeneau*.

Sur son invitation, M. **Paul Pascal** prend place parmi ses Confrères.

M. **René Souèges** dépose sur le Bureau de l'Académie, de la part de M. Henri Belval, un Ouvrage posthume de M. **Henri Colin** intitulé *La Chimie des plantes*.

OPTIQUE. — *Microscopes polarisants utilisant la réflexion vitreuse.* Note (1) de MM. **Aimé Cotton** et **Pierre Manigault**.

Le prix d'un microscope polarisant devient actuellement prohibitif : cela tient, en particulier, à ce qu'on emploie, pour le polariseur et l'analyseur, des appareils en spath, des nicols ou même des polariseurs à champ normal bien plus coûteux. Les films polariseurs, qui, comme les polaroïds utilisent aussi les propriétés optiques des cristaux, sont d'un emploi bien plus économique, mais ils ont toujours l'inconvénient de fournir, outre les rayons polarisés, des rayons qui ne le sont pas. Surtout lorsque deux de ces films sont associés, ces rayons parasites persistants altèrent les teintes observées.

On n'a pas essayé d'utiliser, pour les observations au microscope *en lumière parallèle*, la polarisation de la lumière par réflexion vitreuse, bien que le procédé soit employé dans l'appareil de Nörremberg avec lequel on observe, à l'œil nu, les propriétés des lames cristallines. Sans doute la perte de lumière accompagnant la polarisation sous l'incidence brewstérienne est importante. Mais l'œil humain s'adapte facilement à d'énormes

(1) Séance du 2 janvier 1946.

variations d'intensité lumineuse. Les naturalistes emploient souvent, comme sources de lumière artificielle, de petites lanternes à basse tension; or, à l'essai, elles se sont montrées suffisantes.

Pour que la polarisation par réflexion vitreuse fût complète, il faudrait que le faisceau éclairant soit parallèle (au moins à l'endroit où il se réfléchit sur le miroir), dirigé exactement sous l'angle voulu, et même monochromatique. En fait ces conditions théoriques ne sont pas remplies. A côté des rayons polarisés correctement il y a des rayons qui ne le sont qu'*à peu près*. Mais la proportion de lumière polarisée dans le faisceau utilisé varie, en somme, assez lentement au voisinage du maximum obtenu pour l'incidence brewstérienne. Sans doute on ne peut pas, comme en croisant des polariseurs à champ normal, obtenir l'extinction complète de faisceaux intenses de lumière, mais de tels faisceaux, dans le cas actuel, ne sont pas nécessaires. D'ailleurs on se contente d'extinctions incomplètes dans bien des microscopes polarisants équipés avec des nicols, ne serait-ce que parce que l'on ne s'assujettit pas à donner à l'analyseur l'orientation exacte : les teintes de polarisation chromatiques observées sont alors lavées de blanc; elles sont cependant bien reconnaissables.

Si l'on n'a pas employé plus souvent la polarisation par réflexion vitreuse, c'est probablement parce qu'elle change la direction des faisceaux. C'est un inconvénient qu'on peut atténuer de diverses façons. On peut d'abord laisser constamment le polariseur et l'analyseur dans la position du parallélisme et interposer entre les deux une de ces lames demi-onde pour le jaune moyen dont nous avons signalé les avantages dans les *Comptes rendus* du 27 novembre 1944, p. 528. La teinte sensible sombre que donne cette lame orientée correctement remplace l'extinction proprement dite. On a plus de possibilités en faisant tourner le polariseur et l'analyseur (tout au moins l'un d'entre eux) autour d'un axe parallèle à la direction des rayons polarisés qui lui correspondent. Pour cela il est commode de disposer les glaces qui les constituent dans des boîtiers pareils.

Le *polariseur* contient à demeure une glace de verre transparent non trempé à faces parallèles. Cette glace, bien propre et privée de poussières, est fixée dans le boîtier sous l'angle convenable. Ce boîtier est muni de deux pièces cylindriques creuses T_1 et T'_1 coaxiales définissant la direction des rayons polarisés par la glace, tandis que l'axe d'un troisième tube T_2 définit la direction du faisceau de lumière venant de la source. Celle-ci étant peu encombrante se fixe au tube T_2 et tourne en même temps que la glace polarisatrice autour de l'axe commun à T_1, T'_1 quand on change la direction des vibrations polarisées. L'ensemble forme alors une *lanterne polarisante*. Elle peut servir indépendamment du microscope et s'oriente comme on veut, en particulier de façon que le faisceau polarisé qu'elle fournit soit horizontal ou vertical.

Dans la figure 1, on a représenté la lanterne à côté du microscope et donnant un faisceau horizontal. Nous avons signalé toutes les facilités que procure cette disposition (²).

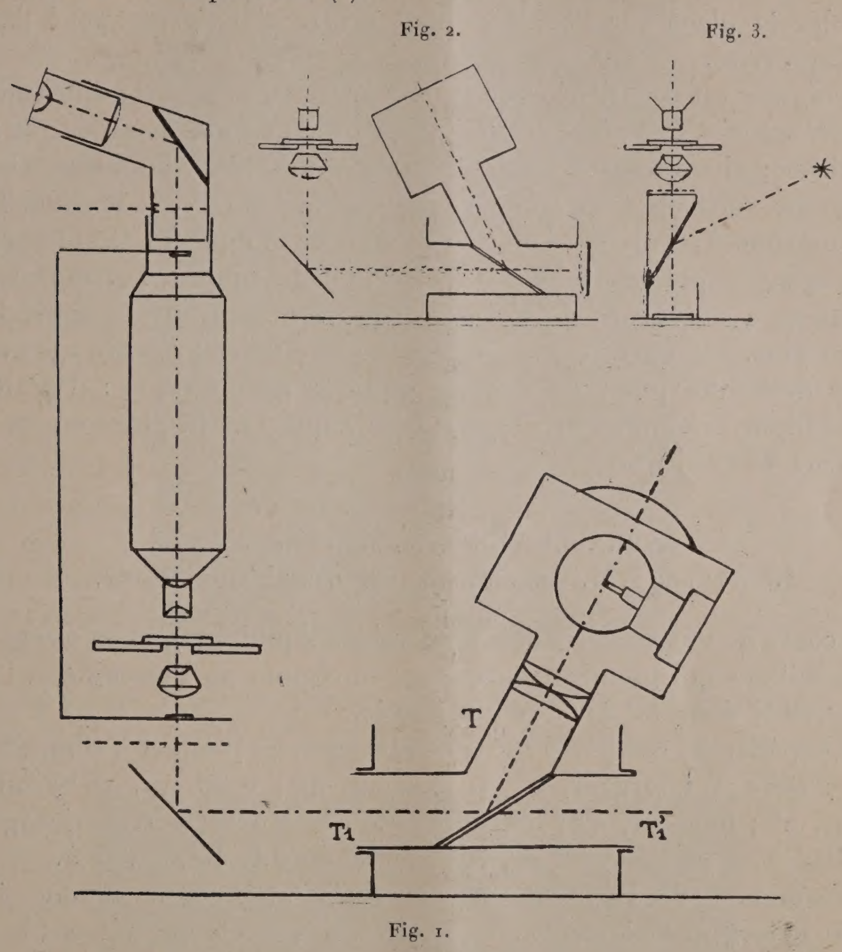


Fig. 1.

Ce polariseur étant formé par une glace transparente permet de faire arriver en même temps sur la préparation un autre faisceau de rayons, polarisés ou non, provenant d'une autre source telle qu'un arc au mercure, ou bien servant à désigner un point de la préparation. En le retournant bout pour bout, comme l'indique la figure 2, on peut le transformer en polariseur de Nörremberg : il suffit de le munir à l'extrémité T_1 d'un miroir plan renvoyant normalement les rayons polarisés par réflexion. Contre cette surface réfléchissante, on peut disposer des lames auxiliaires dont le retard propre sera doublé par la double traversée. Un tel pola-

(²) *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 297. On a simplifié ici la figure 1 en supposant qu'on se contente d'une seule réflexion pour envoyer la lumière dans le microscope.

riseur, avec retour des rayons, peut être utilisé pour transformer rapidement un microscope ordinaire en microscope polarisant si l'on a la place nécessaire pour le substituer au miroir habituel du microscope (*fig.*3). Un polaroïd placé sur l'oculaire peut servir d'analyseur pour l'appareil ainsi improvisé.

L'*analyseur* est constitué comme le polariseur, avec cette différence qu'il doit être muni d'une glace en verre noir ou d'une glace noircie sur sa face postérieure; sinon toutes les images se trouveraient doublées. On place l'analyseur verticalement comme l'indique la figure 1, et le tube T'_1 peut être supprimé. L'oculaire se place dans le tube oblique T_2. On obtient ainsi, sans organe supplémentaire et en laissant la platine horizontale, cette inclinaison avantageuse de l'oculaire que les naturalistes apprécient de plus en plus. En outre cet analyseur à glace noire présente un avantage sur les autres au point de vue de l'optique géométrique : il n'altère en aucune façon la marche des rayons quelle que soit la place où on le met au-dessus de l'objectif.

HYDRAULIQUE.. — *Sur les veines liquides.*
Note [1] de MM. Charles Camichel et Charles Bory.

Au cours de nos recherches sur les veines liquides [2], nous avons étudié les tourbillons qui prennent naissance, en régime de Poiseuille, à l'origine de la veine, dans les ajutages employés.

Les expériences ont porté sur trois ajutages. Le premier a comme dimensions : tube T : largeur, $0^{cm},4$; hauteur, 4^{cm}; longueur, 10^{cm}; tube T′ : largeur, 2^{cm}; hauteur, 4^{cm}; longueur, 30^{cm}. Les deux autres ajutages sont semblables au premier, les rapports de similitude étant 2 et 5.

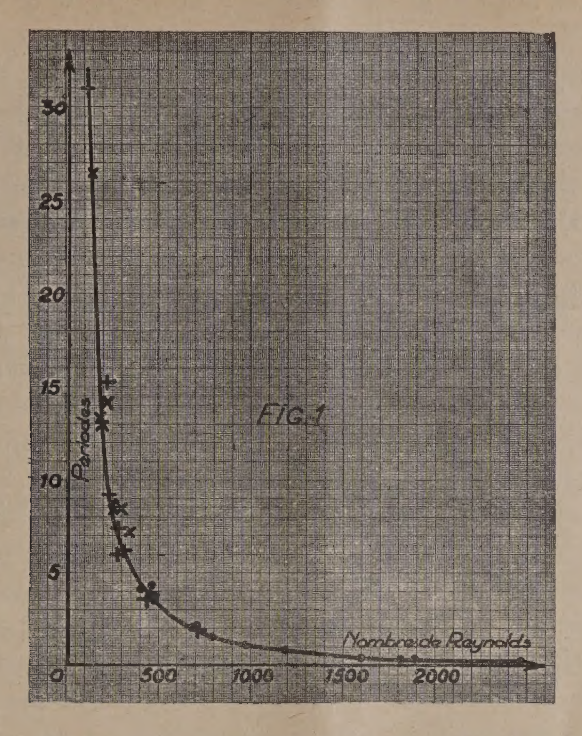
Les nombres de Reynolds sont évalués en prenant comme élément linéaire la largeur de la veine : $0^{cm},4$, $0^{cm},8$, 2^{cm}, et comme vitesse, la vitesse à l'extrémité amont du tube T.

Les tourbillons apparaissent sur les bords de la veine pour un nombre de Reynolds égal à 110. On les observe directement. Leur période, d'abord infinie, décroît régulièrement quand le nombre de Reynolds augmente. La turbulence se développe autour de la veine, qui ne devient elle-même turbulente, depuis son origine dans le tube T′, qu'à partir d'un nombre de Reynolds égal à 2100. Les périodes des tourbillons satisfont à la loi de similitude; elles varient dans le rapport $K^{-1}\lambda^2$, K étant le rapport des coefficients de viscosité cinématique et λ le rapport de similitude. La figure 1 représente la courbe de ces périodes en fonction des nombres de Reynolds

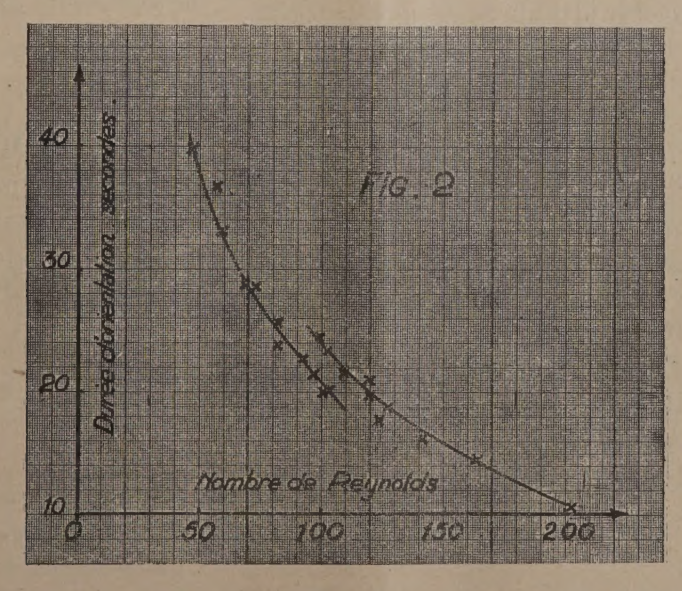
(1) Séance du 28 janvier 1946.

(2) *Comptes rendus*, 218, 1944, p. 816; 220, 1945, p. 418.

jusqu'à 2500, pour l'ajutage le plus grand. On a rapporté, sur la même



courbe, les points obtenus avec les deux autres ajutages, marqués × pour l'ajutage le plus petit et + pour l'ajutage intermédiaire.



Le changement de régime correspondant à ces tourbillons se manifeste dans les courbes représentatives de divers phénomènes, en particulier dans

celles des durées d'orientation de la veine : le robinet aval de l'ajutage étant ouvert, on observe le passage du tourbillon du front de la veine, la formation de la veine dirigée d'abord suivant l'axe de l'ajutage, puis son orientation dans la direction naturelle et le régime permanent. On détermine le moment où la veine vient rencontrer la paroi de l'ajutage. La durée d'orientation de la veine est le temps qui sépare cet instant de l'ouverture du robinet aval. La durée d'orientation diminue quand le nombre de Reynolds augmente (*fig.* 2). Les points déterminés expérimentalement se placent sur deux arcs de courbe distincts. Leur décalage correspond au nombre de Reynolds pour lequel les tourbillons apparaissent. La même remarque s'applique aux courbes C [2] qui présentent, au voisinage de l'origine, une portion rectiligne suivie d'une cassure correspondant au même changement de régime.

Ces tourbillons, sous l'influence d'un obstacle, sont susceptibles de provoquer l'orientation de la veine dans la direction artificielle. L'expérience peut se faire de la façon suivante : on ouvre le robinet aval de l'ajutage, on place une tige verticale de diamètre convenable immédiatement après le passage du tourbillon du front de la veine au voisinage de celle-ci, du côté de l'orientation naturelle. Comme nous l'avons déjà indiqué pour le tourbillon du front de la veine, l'altération de ces tourbillons par la tige produit un changement dans la répartition des pressions qui provoque le déplacement de la veine.

M. Pierre Jolibois fait hommage à l'Académie d'un fascicule extrait de la *Revue scientifique* et intitulé *Sainte-Claire Deville*.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède par la voie du scrutin à l'élection d'un Membre de la Section de Botanique en remplacement de M. *Alexandre Guilliermond* décédé.

Le nombre de votants étant 45 et 47, le scrutin donne les résultats suivants :

	Nombre de suffrages.	
	1er tour.	2e tour.
M. Roger Heim	17	25
M. Lucien Plantefol	14	19
M. Raoul Combes	10	3
M. Albert Goris	2	
M. Henri Humbert	2	

M. Roger Heim, ayant obtenu la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation du Gouvernement provisoire de la République.

Par l'unanimité des suffrages, Sir ALEXANDRE FLEMING est élu Correspondant pour la Section de Médecine et Chirurgie en remplacement de M. *Émile Forgue* décédé.

CORRESPONDANCE.

M. le SECRÉTAIRE PERPÉTUEL signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° FRANÇOIS MICHELIN. *Théorie du rendement de criblage.*

2° RAYMOND FURON. *Formulaire technique du Préhistorien. Ce qu'il faut savoir sur la Géologie et la Biogéographie du Quaternaire, l'Archéologie et l'Anthropologie préhistoriques* (présenté par M. E.-G. Barrillon).

3° GEORGES DEHAUT. *Les doctrines de Georges Cuvier dans leurs rapports avec le transformisme* (présenté par M. E.-G. Barrillon).

4° GEORGES LEVY-HULOT. *L'analyse immédiate des bois.* Préface de M. L. CRUSSARD (présenté par M. P. Jolibois).

M. ÉMILE BRYLINSKI prie l'Académie de bien vouloir le compter au nombre des candidats à la place vacante, dans la Section des Applications de la Science à l'Industrie, par le décès de M. *Georges Charpy*.

ARITHMÉTIQUE. — *Les correspondances birationnelles à coefficients rationnels sur une courbe.* Note de M. FRANÇOIS CHÂTELET, présentée par M. Gaston Julia.

1. Je me suis proposé de chercher toutes les correspondances birationnelles à coefficients rationnels qui transforment en elle-même une courbe algébrique γ dont l'équation a ses coefficients rationnels. C'est un problème qui complète l'étude diophantienne de γ, habituellement limitée à la recherche de ses points à coordonnées rationnelles. On peut traiter ce problème par identification directe en considérant les coefficients de la correspondance cherchée comme autant d'inconnues, qui vérifient un ou plusieurs systèmes d'équations, dont il faut chercher les solutions rationnelles. Le problème ainsi posé est donc encore de nature diophantienne.

Mais il est intéressant de mettre en évidence les rapports de ce problème avec le problème diophantien sur γ et de déduire la solution de l'un de celle de l'autre.

On sait que l'ensemble des correspondances birationnelles sur γ, à coefficients quelconques, forme un groupe, appelé *groupe birationnel sur* γ ; celles de ces correspondances dont les coefficients sont rationnels forment un sous-groupe du précédent, qu'il est commode d'appeler *groupe birationnel sur* γ *dans* R (corps des rationnels).

2. Si γ est de genre supérieur à 1, le groupe birationnel sur γ n'a qu'un nombre fini d'éléments, qu'il est possible de déterminer par un procédé purement algébrique. Pour en trouver le sous-groupe birationnel dans R, il suffit alors de reconnaître parmi les éléments ainsi déterminés ceux qui sont égaux à chacun de leurs conjugués. La solution du problème est donnée dans ce cas par des opérations algébriques et des essais en nombre fini.

J'ai traité d'autre part le problème diophantien sur une courbe de genre 0 (1). J'en rappelle les résultats : si une courbe γ, de genre 0, contient des points rationnels, le groupe birationnel sur γ dans R est isomorphe au groupe des homographies à coefficients rationnels sur une droite rationnelle. Si γ ne contient pas de points rationnels, le groupe est isomorphe au groupe-quotient d'une algèbre de quaternions généralisés par le groupe multiplicatif des entiers rationnels.

3. Reste le cas d'une courbe de genre 1. J'ai pu le traiter en utilisant la méthode galoisienne que j'ai exposée par ailleurs sous une forme générale (2) et dont le Mémoire cité précédemment constitue une première application.

Si γ est de genre 1, on sait déterminer une correspondance birationnelle Θ, à coefficients algébriques, qui transforme γ en une cubique C de la forme de Weierstrass

$$y = x^3 - px - q \qquad (p \text{ et } q \text{ rationnels}, \quad 4p^3 - 27q^2 \neq 0).$$

J'envisage seulement le cas où p et q ne sont pas nuls; dans le cas contraire la méthode s'applique encore mais donne des résultats plus complexes.

Je désigne par k un corps galoisien contenant les coefficients de Θ et par $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ les conjugués (absolus) de Θ. Le produit $\Theta_i\Theta^{-1}$ appartient au groupe birationnel sur C dans k. Il peut être défini par une relation entre l'argument elliptique u d'un point quelconque de C et l'argument u_i de son transformé dans ce produit; cette relation est de la forme

$$u_i = \varepsilon_i u + c_i;$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$ et où c_i est l'argument elliptique d'un point fixe de C à coordonnées dans k. J'ai montré qu'on peut choisir Θ et C de façon que tous les ε_i soient égaux à $+1$ (3).

Par application de la méthode galoisienne rappelée, je remplace la recherche du groupe birationnel sur C dans R par la recherche des solutions d'un *système d'équivalence*

$$\varepsilon\, c_i + c = c^{(i)} + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ce système, c est l'argument elliptique d'un point de C, à coordonnées

(1) *Annales de l'École Normale*, 3e série, 61, 1944, pp. 249-300.
(2) *Bulletin de la Société math.*, 73, 1945 (sous presse).
(3) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 1532.

dans k, qu'il s'agit de déterminer; $c^{(i)}$ est l'argument de son $i^{\text{ième}}$ conjugué et $\varepsilon = \pm 1$. Un couple ε, c, vérifiant le système, détermine un élément du groupe, birationnel sur γ dans R, savoir la transformée par Θ de la correspondance sur C, définie par l'équation

$$u' = \varepsilon u + c.$$

4. Le système précédent est équivalent, suivant la valeur de ε, à l'un des deux systèmes

$$c^{(i)} = c; \qquad c^{(i)} - c + 2c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le premier a pour solutions les arguments des points rationnels sur C. J'ai montré qu'on peut aussi résoudre le second lorsqu'on a obtenu ces points rationnels. Ou bien on constate qu'il n'a pas de solution, ou bien on obtient des solutions en correspondance biunivoque avec les points rationnels sur C. J'en déduis que :

Le groupe birationnel sur γ *dans* R *est isomorphe soit au groupe des points rationnels sur* C *dans* R, *soit au groupe birationnel sur* C *dans* R.

Si γ est de la même classe ([4]) que C, c'est la seconde éventualité qui est vérifiée. Mais il existe d'autres courbes que celles de la classe de C qui vérifient aussi cette éventualité. On peut les caractériser en utilisant la notion de composition entre classes de courbes de genre 1 ([5]) : ce sont les courbes des classes dont le carré est la classe unité.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *La loi d'attente des appels téléphoniques.* Note ([1]) de M. **Félix Pollaczek**, présentée par M. Émile Borel.

Dans une Note ([2]) dont les notations x et y sont remplacées ici par s et $s\eta$, M. E. Vaulot a étudié la loi d'attente des appels téléphoniques qui, sur un groupe de $s \geq 1$ lignes, sont traités au hasard, et a considéré dans ce but la probabilité $F_n(t)$ pour qu'un appel, qui à un instant donné est en attente en même temps que $n \geq 0$ autres appels, ait une durée d'attente $> t$. En supposant que la probabilité pour qu'une communication ait une durée $> t$ est e^{-t}, M. Vaulot établit pour les $F_n(t)$ le système suivant d'équations différentielles et de conditions initiales où $\eta < 1$ est le nombre moyen d'appels par ligne et par unité de temps,

$$(1)\quad s(1+\eta)\,F_n(t) + F'_n(t) = \frac{n}{n+1}\,s\,F_{n-1}(t) + s\eta\,F_{n+1}(t); \quad F_n(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Grâce aux substitutions $F_n(t) = e^{-(1+\eta)st} f_n(st)$; $st = t_0$, les équations (1), dont

([4]) *Comptes rendus*, Note précédente, Remarque 3.

([5]) *Comptes rendus*, 212, 1941, pp. 320-322.

([1]) Séance du 28 janvier 1946.

([2]) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 268.

nous allons représenter les solutions sous forme d'intégrales définies, prennent la forme

$$(2)\qquad f'_n(t_0) = \frac{n}{n+1} f_{n-1}(t_0) + \eta f_{n+1}(t_0); \qquad f_n(0) = 1 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

et, en y effectuant l'opération $\int_0^\infty \ldots e^{-zt_0}\, dt_0$, on obtient, pour les grandeurs $\varphi_n(z) = \int_0^\infty e^{-zt_0} f_n(t_0)\, dt_0$ $(\mathrm{R}(z) > 2\sqrt{\eta})$, les équations

$$z\varphi_n(z) - 1 = \frac{n}{n+1}\varphi_{n-1}(z) + \eta\varphi_{n+1}(z) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

En ajoutant ces équations multipliées par $(n+1)x^n$, membre à membre (x désignant une variable complexe), on obtient pour la fonction

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \varphi_n(z) \qquad (|x| < 1)$$

l'équation différentielle $(x^2 - zx + \eta)(\partial\Phi/\partial x) + (x - z)\Phi = -[1/(1-x)^2]$, dont la solution, régulière pour $x = \beta$, est

$$(3)\qquad \Phi(x, z) = (\alpha - x)^m (\beta - x)^{-m-1} \int_x^\beta (\alpha - \xi)^{-m-1} (\beta - \xi)^m \frac{d\xi}{(1-\xi)^2}, \qquad |x| \leqq 1;$$

nous avons posé ici $\alpha = (z/2) + \sqrt{(z^2/4) - \eta}$, $\beta = (z/2) - \sqrt{(z^2/4) - \eta}$, $m = (\beta/\alpha - \beta)$; $\sqrt{(z^2/4) - \eta} \sim (z/2)$ pour $|z| \gg \sqrt{\eta}$, les grandeurs $(\alpha - \xi)^m (\beta - \xi)^{-m}$ et $(\alpha - x)^m (\beta - x)^{-m}$ étant définies de manière à coïncider pour $\xi = x$. Grâce au théorème de Fourier, on a (avec $c > 2\sqrt{\eta}$)

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \mathrm{F}_n(t) = e^{-(1+\eta)st} \sum_{n=0}^{\infty} x^n f_n(st) = e^{-(1+\eta)st} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} e^{zst} \Phi(x, z)\, dz,$$

et ici, le chemin d'intégration peut être remplacé par un lacet qui suit les deux bords de la coupure $-2\sqrt{\eta} \leqq z \leqq 2\sqrt{\eta}$; car pour $|x| < \sqrt{\eta}$, $\Phi(x, z)$ est holomorphe et bornée dans le plan des z découpé, et égale à $O(1/z)$ pour $z \to \infty$. En passant d'un bord de la coupure à l'autre bord, α et β, et de même m et $-m-1$, se permutent, de sorte que l'intégrale (4) devient

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{-2\sqrt{\eta}+\varepsilon}^{2\sqrt{\eta}-\varepsilon} e^{zst} [\Phi_1(x, z) - \Phi_2(x, z)]\, dz$$
$$= \int_{-2\sqrt{\eta}}^{2\sqrt{\eta}} e^{zst} (\alpha - x)^m (\beta - x)^{-m-1} \left(\int_x^\beta - \int_x^\alpha \ldots d\xi \right) dz.$$

Soit C_ξ un lacet tracé dans le plan des ξ autour de la coupure $\alpha \ldots \beta$, et parcouru au sens positif; on a

$$\int_x^\beta - \int_x^\alpha = \int_\alpha^\beta \ldots d\xi = -(1 - e^{-2\pi i m})^{-1} \int_{C_\xi} \ldots d\xi = (1 - e^{-2\pi i m})^{-1}\, 2\pi i \,\mathrm{Res}[\xi = 1],$$

car la fonction à intégrer est holomorphe dans le plan des ξ découpé, sauf en $\xi = 1$.

En posant ensuite $z=2\sqrt{\eta}\cos\tau$, $m_0=(i/2)\cot\tau-(1/2)$, on obtient

$$(5)\qquad \sum_{0}^{\infty} x^n F_n=\int_0^{\pi} e^{(-1-\eta+2\sqrt{\eta}\cos\ \ )st}\frac{(\sqrt{\eta}e^{-i\tau}-x)^{m_0}\quad(1-\sqrt{\eta}e^{i\tau})^{m_0-1}}{(\sqrt{\eta}e^{i\tau}-x)^{m_0+1}(1-\sqrt{\eta}e^{-i\tau})^{m_0+2}}\,\frac{2\sqrt{\eta}\sin\tau\,d\tau}{e^{\pi\cot\tau}+1}$$

$$(|x|<2\sqrt{\eta}),$$

où les arguments des expressions $\sqrt{\eta}\,e^{-i\tau}-x$, etc., sont ≈ 0 pour $|x|\ll\sqrt{\eta}$, $\tau\approx 0$.

Comme valeur asymptotique de cette intégrale pour les grandes valeurs du temps (pour des valeurs données de s, η, x) on obtient

$$(6)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n F_n(t)=\exp\left[-(1-\sqrt{\eta})^2 st-3.2^{-\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{6}}(st)^{\frac{1}{3}}+\frac{\sqrt{\eta}}{1-\sqrt{\eta}}+\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta}-x}\right]$$
$$\times\pi^{\frac{5}{6}}2(108)^{-\frac{1}{6}}\eta^{\frac{1}{12}}(st)^{-\frac{5}{6}}(1-\sqrt{\eta})^{-3}(\sqrt{\eta}-x)^{-1}\left[1+O\left(t^{-\frac{1}{3}}\right)\right],\qquad(|x|<\sqrt{\eta}).$$

De là on tire pour la fonction

$$(7)\qquad A(t)=\frac{(s\eta)^s}{s!\,\Delta(s,\eta)}\sum_{n=0}^{\infty}\eta^n F_n(t),\qquad \Delta(s,\eta)=\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{(s\eta)^\nu}{\nu!}+\frac{1}{1-\eta}\,\frac{(s\eta)^s}{s!},$$

établie par M. Vaulot, qui donne la probabilité pour que la durée d'attente d'un appel soit $>t$, la formule

$$(8)\qquad A(t)\doteq\frac{(s\eta)^s}{s!\,\Delta(s,\eta)}\exp\left[-(1-\sqrt{\eta})^2 st-3.2^{-\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{6}}(st)^{\frac{1}{3}}+\frac{1+\sqrt{\eta}}{1-\sqrt{\eta}}\right]$$
$$\times 2(108)^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\sqrt{\eta}st}{\pi}\right)^{-\frac{5}{6}}(1-\sqrt{\eta})^{-4}\left[1+O\left(t^{-\frac{1}{3}}\right)\right].$$

Par contre, en posant dans $A(t)$, $\eta=1-b\sqrt{2/s}$, $t=\theta\sqrt{2/s}$, on obtient pour les grandes valeurs de s (pour des valeurs données de b et de θ)

$$(9)\qquad A(t)=[1+\sqrt{\pi}\,b\,e^{b^2}(1+\Phi(b))]^{-1}(-\pi)\sqrt{2b\theta}\,H_1^{(1)}(2i\sqrt{2b\theta})\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right].$$

($H_1^{(1)}\equiv$ fonction de Hankel; $\Phi(b)\equiv$ intégrale de Gauss).

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Le problème des stocks.*
Note (¹) de M. **Edgar Baticle**, présentée par M. Émile Borel.

Le problème que j'ai en vue est le suivant : n magasins ayant reçu chacun un stock de s objets, quelle est la probabilité que k magasins seront épuisés quand q achats auront été effectués dans l'ensemble des magasins ?

Ce problème se rattache directement au *problème des compartiments* traité dans ma Note des *Comptes rendus* du 4 novembre 1935.

(¹) Séance du 4 février 1946.

Il est en effet le même que celui du calcul de la probabilité pour que, q objets étant répartis au hasard dans n compartiments, il y ait k compartiments avec plus de $s-1$ objets.

Aux notations près, la formule que j'ai donnée pour cette probabilité est $p_k=\sum(-1)^u C_n^k C_{n-k}^u C_{q+n-1-(k+u)s}^{n-1} : C_{q+n-1}^{n-1}$, où u a toutes les valeurs possibles depuis zéro jusqu'à celle après laquelle $q-(k+u)s$ change de signe.

Mais on remarquera que la probabilité la plus intéressante pour le problème en cause est la probabilité P pour que *aucun* magasin ne soit épuisé quand q achats auront été effectués. Cette probabilité s'obtient en faisant $k=0$ dans la formule ci-dessus. On obtient ainsi

$$(1)\qquad P=\sum(-1)^u C_n^u C_{q+n-1-us}^{n-1} : C_{q+n-1}^{n-1}.$$

Si je suppose que q et s soient grands par rapport à n, j'aurai, en posant $x=s/q$, la formule asymptotique

$$(2)\qquad P(x)=\sum_0(-1)^u C_n^u(1-ux)^{n-1},$$

dans laquelle il ne faut retenir que les termes pour lesquels la parenthèse est positive.

C'est la fonction de répartition de la variable aléatoire $X=s/q$.

La densité de probabilité est

$$p(x)=\sum_1(-1)^{u+1} C_n^u(n-1)u(1-ux)^{n-2},$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad p(x)=n(n-1)\sum_1(-1)^{u+1} C_{n-1}^{u-1}(1-ux)^{n-2}.$$

Les courbes (2) et (3) sont formées de paraboles de degrés respectifs $n-1$ et $n-2$, qui se raccordent pour des valeurs de x égales à $1/2$, $1/3$, ..., $1/n$. La densité de probabilité a une allure *binomiale* et sa dissymétrie s'accentue quand on fait croître n.

On remarquera que, pour $x \leqq 1/n$, $P(x)$ et $p(x)$ sont nulles. L'expression complète du second membre de (2) est donc identiquement nulle, ainsi que ses dérivées.

On peut se proposer de rechercher quel est le stock à prévoir pour que q clients soient *en moyenne* satisfaits. Il suffit pour cela de calculer l'espérance mathématique $E[X]$ de la variable aléatoire X.

On a

$$E[X]=\int_0^1 x\,dP=1-\int_0^1 P\,dx=\frac{1}{n}\left(C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3\ldots+(-1)^{u+1}\frac{1}{u}C_n^u\ldots\right).$$

Si j'égale la parenthèse à $\varphi(n)$, j'aurai

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)=\sum(-1)^{u+1}\frac{1}{u}(C_n^u-C_{n-1}^u)=\frac{1}{n}\sum(-1)^{u+1}C_n^u=\frac{1}{n}.$$

D'où

$$E[X]=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Or $nE[X]=E[ns/q]$ est le stock à prévoir par acheteur. On voit qu'il est égal à la somme des n premiers termes de la série harmonique.

Lorsque n est suffisamment grand on peut écrire $nE[X]\cong 1+\mathcal{L}n$. Donc $q\mathcal{L}n$ représente le *foisonnement* du stock et $\mathcal{L}n$ est la *marge de sécurité* à prévoir pour le stock, quand les acheteurs ont le choix entre n magasins.

On peut calculer $E[X^2]$, $E[X^3]$, ... en procédant comme pour $E[X]$. Par exemple, on aura

$$E[X^2]=\int_0^1 x^2\,dP=1-2\int_0^1 P\,x\,dx=\frac{2}{n(n+1)}\left(C_n^1-\frac{1}{2^2}C_n^2+\frac{1}{3^2}C_n^3+\ldots\right)=\frac{2}{n(n+1)}\psi(n)$$

et

$$\psi(n)-\psi(n-1)=\sum(-1)^{u+1}\frac{1}{un}C_n^u=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\cong\frac{1}{n}(1+\mathcal{L}n).$$

D'où

$$\psi(n)\cong 1+\mathcal{L}n+\frac{1}{2}(\mathcal{L}n)^2 \qquad \text{et} \qquad E[X^2]\cong\frac{2}{n(n+1)}\left[1+\mathcal{L}n+\frac{1}{2}(\mathcal{L}n)^2\right].$$

On peut ainsi calculer la fluctuation $\mu'_2=E[X^2]-(E[X])^2$. Si l'on remplace $2/n(n+1)$ par $2/n^2$ on trouve $\mu'_2\doteq 1/n^2$ et l'on a pour l'écart-type

$$\sigma=\sqrt{\mu'_2}\cong\frac{1}{n}.$$

Le schéma étudié ci-dessus peut s'appliquer à d'autres problèmes. Par exemple, en matière de transports, on voit que, si l'on veut remplacer un train ayant à transporter q voyageurs par n trains, chaque voyageur pouvant emprunter l'un quelconque de ceux-ci, il faut prévoir une capacité totale de $q(1+1/2+\ldots+1/n)$ pour que, en moyenne, les q voyageurs puissent être transportés sans attente.

GÉOMÉTRIE. — *Sur une classe de surfaces.*

Note de M. **Gheorghe Th. Gheorghiu**, présentée par M. Paul Montel.

1. Récemment nous avons étudié une transformation asymptotique [1] et, à cette occasion, nous avons rencontré une classe de surfaces sur lesquelles nous voulons revenir dans cette Note. Elles sont définies par les propriétés : *a.* si M est le point courant de la surface rapporté aux asymptotiques, il existe sur la quadrique de Darboux d'indice c un point M′ qui décrit une surface (M′) trans-

---

[1] *Sur les transformations asymptotiques* (*Bull. des Sc. Math.*, 2e série, janv.-fév., 1945); pour plus de détails voir le Mémoire avec le même titre publié dans *Disquisitiones Mathematicae et Physicae*, 4, Bucarest, 1945, pp. 131-173.

formée asymptotique de la surface (M); *b.* la quadrique de Darboux d'indice c de la surface (M') en M' passe par M; *c.* les surfaces (M) et (M') sont applicables projectivement; *d.* les tangentes asymptotiques homologues aux deux surfaces sont concourantes en deux points R et S. Les surfaces (M) et (M') définies par ces conditions sont identiques, à une homographie près. Analytiquement, si nous désignons par x le point qui décrit la surface initiale, par x',

$$x' = \left[\frac{1}{2}(\omega_u - \theta_u)(\omega_v - \theta_v) + (c-1)\beta\gamma - \theta_{uv}\right]x + (\omega_v - \theta_v)x_u + (\omega_u - \theta_u)x_v + 2x_{uv},$$

le point qui décrit la surface finale χ, et si nous posons

$$r = (\log C)_u - \omega_u, \qquad s = (\log C)_v - \omega_v,$$

nous devrons avoir les relations

$$r_v = s_u = rs + c\beta\gamma, \qquad rs = \beta\gamma + (\log C)_{uv} - 2C,$$
$$r_u = r(\log C)_u + \beta(\log C)_v + \beta_v, \qquad s_v = s(\log C)_v + \gamma(\log C)_u + \gamma_u,$$
$$L = -\omega_{uu} + \frac{1}{2}\omega_u^2 - \beta\omega_v - \beta_v, \qquad M = -\omega_{vv} + \frac{1}{2}\omega_v^2 - \gamma\omega_u - \gamma_u,$$

où β, γ, L, M sont les fonctions fondamentales de M. Fubini, qui définissent la surface (M) projectivement. En particulier, si une des fonctions r ou s est nulle, nous avons nécessairement $c = 0$. Si $r = s = 0$, nous avons les surfaces de Tzitzéica dont les quadriques de Lie, aux points M et M', sont confondues, car elles sont des cas particuliers des surfaces de M. Godeaux.

2. Les surfaces dont nous parlerons, satisfaisant à la condition (d), sont des cas particuliers d'une classe de surfaces plus étendue de M. Finikoff [2]. Avec les notations de M. Finikoff, nous sommes dans le cas où $a = b$. Plus précisément, si (a) $rs \neq 0$, $\varphi = 1/u + v$; (b) $r = 0$, $s = 1$, $\varphi = e^v$; (c) $r = s = 0$, $\varphi = \text{const.}$

3. En général, quelles que soient les fonctions r et s, la droite MM' passe par un point fixe O tandis que la droite RS reste dans un plan fixe (P). Les quadriques de Darboux aux points correspondants M et M' se coupent suivant deux courbes planes dont l'une se trouve dans le plan (P).

Ces propriétés imposent pour nos surfaces une étude centro-affine. Si l'on prend O comme origine et le plan (P) pour plan à l'infini, les coordonnées cartésiennes du point M dans le cas $rs \neq 0$, $c = 0$ (cas de la quadrique de Lie) vérifient le système

$$x_{uu} = \frac{F_u}{F}x_u + \frac{A}{F}x_v,$$
$$x_{uv} = -\frac{1}{u+v}x_u - \frac{1}{u+v}x_v + 2Cx,$$
$$x_{vv} = \frac{D}{F}x_u + \frac{F_v}{F}x_v,$$

où $F = C/(u+v)$.

([2]) *Lincei*, 20, 1934, pp. 164-168.

4. Au point M nous avons une quadrique osculatrice à la surface par rapport à laquelle le pôle du plan (P) est le point O. Cette quadrique, outre les tangentes asymptotiques, coupe la quadrique de Lie, au point M, suivant une conique dont le plan est (Q). Si le plan (Q) contient le point O, la surface répond à nos conditions et seulement dans ce cas (pour $c=0$).

5. Les quadriques de Darboux d'indice c relatives aux surfaces (M) et (M′), outre les points M et M′, ont quatre points caractéristiques. Les points homologues sont coplanaires avec les points M et M′. Dans le cas $rs\neq 0$, pour les quadriques de Lie, les quatre plans ainsi déterminés ont comme rapport anharmonique l'expression

$$I=\frac{\gamma s}{\beta r}\,\frac{(\beta\omega_v+\beta_v)^2+4C\beta r}{(\gamma\omega_u+\gamma_u)^2+4C\gamma s},$$

qui est invariante de la transformation conduisant de la surface (M) à la surface (M′).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'inégalité différentielle* $|f^{(n)}(x)|\geq m|f(x)|$. Note de M. **Jean G. Mikusiński**, présentée par M. Paul Montel.

Nous esquissons ici une démonstration du théorème suivant :

Théorème. — *Si la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ d'une fonction satisfait, dans un intervalle ouvert (a, b), à l'inégalité*

$$|f^{(n)}(x)|\geq m|f(x)|>0 \qquad (m \text{ const.})$$

et si, de plus, cette fonction $f(x)$ tend vers zéro aux deux extrémités de cet intervalle, on a toujours

$$b-a<N.m^{-\frac{1}{n}},$$

où N *ne dépend que de* n.

Ce théorème s'applique facilement à la théorie de l'équation différentielle

$$y^{(n)}+A(x)y=0.$$

Si $A(x)$ est une fonction continue et si $|A(x)|\geq m>0$, la distance entre les zéros successifs de toute fonction satisfaisant à cette équation (et possédant au moins deux zéros) est inférieure à $N.m^{-(1/n)}$.

Pour démontrer le théorème, nous nous appuyons sur les deux lemmes suivants qu'on établit sans difficultés.

Lemme 1. — *Si l'on a, dans l'intervalle ouvert* $(0, 1)$, $\varphi(x).\varphi''(x)<0$, *la fonction* $\varphi(x)$ *satisfait au moins à l'une des deux inégalités*

$$|\varphi(x)|>px, \qquad |\varphi(x)|>p(1-x),$$

où $p=|\varphi(1-0)-\varphi(0+0)|$.

Lemme 2. — *Si* $\varphi(x) \neq 0$ *dans* $(0, 1)$ *et si la dérivée* $\varphi'(x)$ *satisfait dans* $(0, 1)$ *au moins à l'une des deux inégalités*

$$|\varphi'(x)| > px^r \quad \text{ou} \quad |\varphi'(x)| > p(1-x)^r,$$

où $p, r > 0$, *alors, au moins une des deux inégalités*

$$|\varphi(x)| > \frac{p}{r+1} x^{r+1} \quad \text{ou} \quad |\varphi(x)| > \frac{p}{r+1}(1-x)^{r+1}$$

a lieu dans le même intervalle $(0, 1)$.

On s'assure ensuite que, les conditions du théorème étant remplies, le nombre q des points x_i de $(0, 1)$, où au moins une des fonctions

$$f(x),\, f'(x),\, \ldots\, f^{(n-1)}(x) \tag{1}$$

s'annule, ne peut pas surpasser $n(n-1)/2$. L'intervalle $(0, 1)$ est divisé, par ces points x_i, en $q+1$ parties P. On remarque de plus que, à l'intérieur de chaque intervalle P, toutes les fonctions (1) ainsi que $f^{(n)}(x)$ sont différentes de zéro et qu'il existe un nombre naturel $k \leqq n-1$ tel que

$$f^{(k-1)}(x) . f^{(k+1)}(x) < 0 \quad \text{dans P.}$$

Cela permet de démontrer que la longueur de chaque intervalle P est inférieure à $\sqrt[n]{(n+1)!} . m^{-(1/n)}$. En effet, posons

$$\varphi(x) = f[\alpha + (\beta - \alpha)x],$$

où α et β sont les extrémités de l'intervalle P. On a, dans $(0, 1)$,

$$\varphi(x).\varphi'(x)\ldots\varphi^{(n)}(x) \neq 0, \quad |\varphi^{(n)}(x)| \geqq m(\beta-\alpha)^n.|\varphi(x)|, \quad \varphi^{(k-1)}(x).\varphi^{(k+1)}(x) < 0. \tag{2}$$

En vertu du lemme 1, on a

$$|\varphi^{(k-1)}(x)| > px \quad \text{ou bien} \quad |\varphi^{(k-1)}(x)| > p(1-x),$$

où

$$p = |\varphi^{(k-1)}(1-0) - \varphi^{(k-1)}(0+0)|.$$

En appliquant maintenant le lemme 2, on trouve par induction

$$|\varphi(x)| > \frac{p}{k!} x^k \quad \text{ou} \quad |\varphi(x)| > \frac{p}{k!}(1-x)^k.$$

D'où, en comparant avec (2),

$$|\varphi^{(n)}(x)| > \frac{pm(\beta-\alpha)^n}{k!} x^k \quad \text{ou} \quad |\varphi^{(n)}(x)| > \frac{pm(\beta-\alpha)^n}{k!}(1-x)^k.$$

En appliquant de nouveau le lemme 2, on a, par induction,

$$|\varphi^{(k)}(x)| > \frac{pm(\beta-\alpha)^n}{n!} x^n \quad \text{ou} \quad |\varphi^{(k)}(x)| > \frac{pm(\beta-\alpha)^n}{n!}(1-x)^n.$$

L'intégration de ces inégalités entre les limites o et 1 donne, dans les deux cas,

$$|\varphi^{(k-1)}(1-0)-\varphi^{(k-1)}(0+0)|>p\,\frac{m(\beta-\alpha)^n}{(n+1)!},$$

d'où, en vertu de la définition de p, résulte l'inégalité annoncée

$$\beta-\alpha<\sqrt[n]{(n+1)!}\,m^{-\frac{1}{n}}.$$

Le nombre de tous les intervalles P ne pouvant surpasser le nombre $1+n(n+1)/2$, la méthode exposée donne pour N la valeur

$$\left[1+\frac{1}{2}n(n+1)\right]\sqrt[n]{(n+1)!}.$$

En appliquant un autre procédé, on peut trouver pour N des valeurs plus précises. On peut aussi généraliser les résultats aux systèmes d'inégalités

$$\begin{cases} |f_i'(x)|\geqq m_i\,|f_{i+1}(x)| & (i=1,\ldots,n-1),\\ |f_n'(x)|\geqq m_n|f_1(x)|, \end{cases}$$

où les m_i $(i=1,\ldots,n)$ sont des constantes positives. Si les inégalités ci-dessus sont satisfaites dans un intervalle ouvert $(a,\ b)$, par un système de fonctions $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ et si $f_1(x)$, étant différent de zéro à l'intérieur de $(a,\ b)$, tend vers zéro aux deux extrémités de cet intervalle, on a $b-a<\mathrm{N}.(m_1\ldots m_n)^{-1/n}$, où N ne dépend que de n. On peut admettre, pour N, la même valeur $[1+n(n+1)/2]\sqrt[n]{(n+1)!}$.

Le résultat énoncé dans cette Note a été obtenu en 1940, mais, à cause de l'occupation allemande en Pologne, il n'avait pu être publié.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions holomorphes et bornées dans une partie infinie d'un demi-plan.* Note [1] de M. **Szolem Mandelbrojt**, présentée par M. Paul Montel.

Le théorème suivant est bien connu :

(A). *Si la fonction $f(z)$, non identiquement nulle, est holomorphe et bornée dans le demi-plan $x\geqq 0$ $(z=x+yi)$, on a*

$$\int_1^\infty \frac{\log|f(iy)|}{y^2}\,dy>-\infty.$$

Ce théorème a servi à MM. Denjoy et Carleman dans leur démonstration des théorèmes sur la quasi-analyticité. Ce même théorème a pu servir dans plusieurs autres circonstances importantes.

---

(1) Séance du 4 février 1946.

Posons $M(r) = \underset{|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}}{\text{Max}} |f(re^{i\varphi})|$ $(r > 0)$. On a évidemment

$$\int_1^\infty \frac{\log M(r)}{r^2} dr > -\infty.$$

Cette forme de l'énoncé peut être généralisée de manière à rendre des services importants dans la théorie des classes de fonctions indéfiniment dérivables. On peut, en effet, démontrer le théorème suivant :

(B). *Soit* $A(r)$ *une fonction décroissante, définie pour* $r \geqq a > 0$, *et telle que*

$$0 \leqq A(r) < \frac{\pi}{2}, \qquad \int_a^\infty \frac{A(r)}{r} dr < \infty.$$

Soit $f(z)$ *une fonction holomorphe et bornée dans la région définie par l'inégalité* $(z = re^{i\varphi})$

$$|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2} - A(r) \; (r \geqq a).$$

En posant $M(r) = \underset{|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2} - A(r)}{\text{Max}} |f(re^{i\varphi})|$, *on a*

$$\int_a^\infty \frac{\log M(r)}{r^2} dr > -\infty.$$

Le sens de ce théorème apparaît plus clairement lorsqu'on effectue la transformation $z = e^s$. Voici l'énoncé avec cette nouvelle variable s :

(C). *Soit* D *un domaine fermé défini par les inégalités* $(s = \sigma + ti)$, $\sigma \geqq d$, $|t| \leqq g(\sigma)$, *où* $g(\sigma)$ *est une fonction positive croissante pour* $\sigma \geqq d$, *telle que* $\lim_{\sigma = \infty} g(\sigma) = \pi/2$. *Supposons que l'aire de la partie de la demi-bande horizontale* S : $|t| \leqq \pi/2$, $\sigma \geqq d$, *non contenue dans* D, *soit finie. Soit* $F(s)$ *une fonction, non identiquement nulle, holomorphe et bornée dans* D. *En posant*

$$M(\sigma) = \underset{|t| \leqq g(\sigma)}{\text{Max}} |F(\sigma + ti| \; (\sigma \geqq d),$$

on a

$$\int^\infty \log M(\sigma) e^{-\sigma} d\sigma > -\infty.$$

Le théorème classique, (A), correspond au cas où D est confondu avec la demi-bande $|t| \leqq \pi/2$, $\sigma \geqq d$.

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant :

D *étant le domaine défini dans l'énoncé* (C), *et* h *étant suffisamment grand, il existe une fonction* $z(s) = x(s) + y(s)\iota$, *holomorphe dans la demi-bande horizontale* S : $\sigma \geqq h$, $|t| \leqq \pi/2$, *et satisfaisant dans* S *les conditions suivantes :*

$$z = z(s) \in D, \qquad |z(s) - s| < N < \infty, \qquad 0 < m < \frac{\partial x(s)}{\partial \sigma} < M < \infty,$$

où m, M *et* N *sont des constantes.*

La fonction satisfaisant les conditions de ce lemme est donnée par

$$z(s) = s + k\int_{h}^{\infty} \frac{u\left(\frac{\pi}{2} - g(u)\right)}{s+u}\,du.$$

où $k > 0$ est une constante suffisamment grande.

Le fait que l'aire de $S - D$, de l'énoncé (C), est borné est essentiel. On peut, en effet, démontrer que *si $a > \pi/2$, il existe une fonctian* $F(s)$, *non identiquement nulle, holomorphe et bornée dans le domaine fermé $|t| \leq \pi/2 - a/\sigma$, $\sigma \geq d\,(d > 0)$, et telle, qu'en posant*

$$M(\sigma) = \max_{|t| \leq \pi/2 - a/\sigma} |F(\sigma + ti)|,$$

$$(a) \qquad \int_{d}^{\infty} \log M(\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma = -\infty.$$

Il est probable que la fonction a/σ puisse ici être remplacée par n'importe quelle fonction décroissante $u(\sigma) > 0$, telle que $\int_{d}^{\infty} u(\sigma)\, d\sigma = \infty$. Autrement dit, si l'aire de $S - D$ est infinie, il existe toujours une fonction, non identiquement nulle dans D et satisfaisant (a).

Nous utilisons les considérations de cette Note dans les recherches concernant les séries asymptotiques générales.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Essai d'une théorie des fonctions analytiques dans les corps valués complets : théorèmes de Nevanlinna; transformations holomorphes.* Note [1] de M. **Marc Krasner**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Je conserve les notations de mes Notes précédentes [2]. En plus, dans la première partie de cette Note, K sera supposé algébriquement fermé. Une fonction $f(x)$, méromorphe dans une couronne $\bar{\rho} \leq |x - \alpha| \leq \rho$ de R peut se mettre sous la forme $g(x):h(x)$, où $g(x)$, $h(x)$ soient deux séries de Laurent en $x - \alpha$, convergeant et sans zéros communs dans la couronne, et dont $h(x)$ soit telle que, $r^{(m)}$ étant la moyenne géométrique des valeurs réelles [3] des $\bar{\rho}$, ρ, on ait $r_{-1,h} < r^{(m)} \leq r_{0,h}$. Dès lors les fonctions $n(\bar{r}, r)$ et $N(\bar{r}, r; 0)$, prises pour la fonction $\lambda g(x) + \mu h(x)\,[\lambda, \mu \in K, \lambda\mu \neq 0]$, ne dépendent (pour $\bar{\rho} \leq \bar{r}, r \leq \rho$) que des $f(x)$ et $a = -\mu:\lambda$ (si $\lambda = 0$, on pose $a = \infty_K$), et seront notées, $f(x)$ étant fixée, $n(\bar{r}, r; a)$ et $N(\bar{r}, r; a)$. $M^{\star}_{\lambda g + \mu h}(r)$ désignant la fonction $M^{\star}(r)$ pour $\lambda g(x) + \mu h(x)$, $S(r; a) - S(\bar{r}; a)$ est égale à la différence des logarithmes des $M^{\star}_{g-ah}(r):M^{\star}_{g-ah}(\bar{r})$ et $M^{\star}_{h}(r):M^{\star}_{h}(\bar{r})$, égale à $N(\bar{r}, r; a) - N(\bar{r}, r, \infty_K)[\infty_K \neq a]$.

---

(1) Séance du 28 janvier 1946.

(2) *Comptes rendus*, **222**, 1946, pp. 37-40 et 165-167.

(3) Voir Krasner, *Comptes rendus*, **219**, 1944, pp. 433-435.

Si l'on pose, pour $a \neq \infty_K$, $T(\bar{r}, r; a) = S_-(r, a) - S_-(\bar{r}, a) + N(\bar{r}, r; a)$, $T_a(\bar{r}, r; a) = S_+(r, a) - S_+(\bar{r}, a) + N(\bar{r}, r; \infty_K)$, *tous les* $T(\bar{r}, r; a)$ et $T_a(\bar{r}, r; \infty_K)$ *sont convexes en* $\bar{r}$ *et en* r, *et l'on a* $T(\bar{r}, r; a) = T_a(\bar{r}, r; \infty_K)$, ce qui constitue, si $\bar{\rho} = 0$ et si l'on pose $\bar{r} = 0$, l'analogue du 1[er] *théorème de Nevanlinna*. Deux fonctions réelles de deux variables réelles, définies sur le carré topologique du segment $[\bar{\rho}, \rho]$ de l'axe réel, étant considérées comme équivalentes si leur différence y est bornée en valeur absolue, tous les $T_a(\bar{r}, r; \infty_K)$ et, par suite, $T(\bar{r}, r; a)$ sont équivalentes, et la classe d'équivalence qu'elles définissent sera notée $T(\bar{r}, r)$ et dite la *caractéristique* de $f(x)$. On montre que si $a_1, a_2, \ldots, a_l$ sont l éléments distincts de K, $\Sigma N(\bar{r}, r; a_i) - (l-1)T(\bar{r}, r; 0)$, où la somme Σ est étendue aux $i = 1, 2, \ldots, l$, *est bornée inférieurement* (analogue du 2[e] *théorème de Nevanlinna*) et que, si $\bar{\rho} = 0^+$ et α n'est pas un point ordinaire ou un pôle de $f(x)$, il existe au plus *une* valeur $a_0 \in K$ telle qu'on puisse trouver un $a \in K$ de manière que, pour r fixe, 1 ne soit pas compris (au sens large) entre les limites inférieure et supérieure, pour $\bar{r} \to 0^+$, de $n(\bar{r}, r; a) : n(\bar{r}, r; a_0)$ [et que $n(\bar{r}, r; a_0)$ reste fini quand $\bar{r} \to 0^+$].

Dans la suite de la Note, K n'est plus supposé algébriquement fermé, sa fermeture algébrique est notée $\mathfrak{k}$ et le squelette ([4]) de $\mathfrak{k}$ est noté $\mathfrak{S}$. Une fonction $g(x)$ méromorphe dans un cercle de K de centre α est dite un *prolongement méromorphe* d'une série de Taylor $f(x)$ en $x - \alpha$ s'il existe un voisinage de α où $g(x) = f(x)$. Deux prolongements méromorphes de $f(x)$ sont égaux partout, où ils sont définis tous les deux, ce qui permet de définir, de manière évidente, le *prolongement méromorphe* et le *cercle de méromorphie* de $f(x)$, et les *formules de M. Hadamard* qui les déterminent à partir des coefficients de $f(x)$ restent valables dans les corps valués complets.

Si $\alpha \in K$, l'élément $\bar{\alpha}$ du squelette ([4]) S de K tel que $\alpha \in \bar{\alpha}$ sera dit le *reste squelettique de* α, et l'ensemble S(A) des restes squelettiques des $\alpha \in A \subseteq K$ sera dit le *squelette de* A. Soient $\psi(\zeta)$ un polynome dans S et Z_ψ l'ensemble des $\zeta \in S$, pour lesquels $\psi(\zeta)$ a un sens (autrement dit a tous ses termes addibles). $Z \subseteq Z_\psi$ étant une couronne $\bar{\rho} \leq |\zeta| \leq \rho$ de S, l'ensemble des valeurs de $\psi(\zeta)$ sur Z sera noté $(Z; \psi)$ et dit un *retract polynomial de* S. Une réunion $\wedge$ de retracts polynomiaux de S est dite un *ensemble retractif de* S. Si $\psi(\zeta)$ et S sont tels qu'il existe un sous-corpoïde ([4]) S′ de S, contenant tous les coefficients de $\psi(\zeta)$ et tel que R soit une extension transcendante pure de son corps ([4]) R′, le retract $(Z; \psi)$ est dit *analysable* (à l'aide de S′), et un ensemble retractif $\wedge$ de S est dit *analysable* s'il est une réunion de retracts analysables à l'aide d'un même corpoïde. On démontre qu'un retract analysable $(Z; \psi(\zeta))$ définit $\psi(\zeta)$ à une transformation linéaire $\zeta' = \alpha\zeta + \beta (\alpha, \beta \in S')$ sur ζ près, et qu'un ensemble retractif analysable $\wedge$ définit complètement ses retracts *maximaux*, autrement dit non contenus dans aucun autre de ses retracts. Soit $\Phi_\alpha(\zeta)$ la

---

([4]) Voir KRASNER, *Comptes rendus*, **219**, 1944, pp. 345-347.

fonction définie sur la couronne $Z^*: r' \leq |\zeta| \leq r^*$ de (^{2}) S, égale à $a_n\zeta^n$, où $n = \lambda_i$, ou à $\zeta^{\lambda_i} f_i(\zeta)$ suivant que $r_{i-1} < |\zeta| < r_i$ ou $|\zeta| = r_i$. Soit $F(x)$ une série de Taylor de k en $x - \alpha$. L'application $T = \{x \to F(x)\}$, définie sur le cercle de convergence C^* de $F(x)$ dans K sera dite une *transformation holomorphe* de C^*. Si l'on pose $f(x) = F(x) - F(\alpha)$, on a $a_0 = f(\alpha) = 0$, $r' = 0$, et Z^* est un cercle. z étant un zéro de $f(x)$ dans $\mathfrak{k}$, l'ensemble des $x \in K$ tels que pour tout zéro z' de $f(x)$, on ait $|z - x| \leq |z' - x|$, sera noté E_z. En vertu de mes Notes citées (^{2}), *on a* $|f(x)| \leq |\Phi_\alpha(\overline{x - \alpha})|$, *le signe étant* $<$ *ou* $=$ *suivant que* $x \notin$ *ou* $\in E_\alpha$, *et si* $x \in E_\alpha$, *on a* $\overline{f(x)} = \Phi_\alpha(\overline{x - \alpha})$. Si $F'(\alpha) = a_1 \neq 0$, le cercle $C_\alpha(T): |x - \alpha| < r_1$, de K, y est le cercle maximal C de centre α tel que, pour tous $x, x' \in C$, $|F(x) - F(x')| = |F'(\alpha)|\,|x - x'|$. T *est*, donc, *une similitude locale* (^{3}) *en* α *de rapport de similitude* (^{3}) $|F'(\alpha)|$, *dont* $C_\alpha(T)$ *est le cercle de similitude* (^{3}) (analogue de la *représentation conforme*) *et*, *si* $K = \mathfrak{k}$, aussi *celui d'univalence*. $x \notin E_\alpha$ implique $\Phi_\alpha(\overline{x - \alpha}) = 0$, d'où $S(TE_\alpha - F(\alpha)) = \Phi_\alpha(Z^*)$. z étant un zéro de $f(x)$ dans $\mathfrak{k}$, soient $\eta_K(z)$, dit le *nombre d'irrégularité de* K *en* z, la borne sup. (semi-réelle) de $\omega(z - x)$, où x parcourt K, $S_z = S(C^* - z)$ [qui est la réunion de la couronne $Z(z): \mathrm{Exp}(-\eta(z)) < |\zeta| \leq r^*$ de S et, si $\eta(z)$ est réel, d'un ensemble $J(z)$ des $\zeta \in \mathfrak{S}$ tels que $|\zeta| = \mathrm{Exp}(-\eta(z))$], $\Phi_z(\zeta)$ la fonction définie à l'aide des $F(x)$, z, $K(z)$ comme $\Phi_\alpha(\zeta)$ l'a été à l'aide des $F(x)$, α, K. $S(TE_z - F(\alpha)) = \Phi_z(S_z) = \Phi_z(Z(z)) \cup \Phi_z(J(z))$. Puisque $C^* = \cup E_z$, $S(TC^* - F(x))$ est la réunion des $\Phi_z(Z(z))$ et des $\Phi_z(J(z))$, z parcourant les zéros de $f(z)$ dans $\mathfrak{k}$. $\Phi_z(Z(z))$ et $\Phi_z(J(z))$ [comme on le montre], donc $S_\alpha(T; K) = S(TC^* - F(\alpha))$ sont des ensembles retractifs de S. Il est analysable s'il existe un corps K' entre k et K, tel que R soit une extension transcendante pure de son corps de restes R'.

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Parallèle entre la détermination cinématique, de la dureté à l'aide d'un cône, d'une pyramide et d'une bille.* Note (^{1}) de MM. **Pierre Dubois** et **André Dumez**, transmise par M. Paul Pascal.

Nous avons défini (^{2}) la *dureté cinématique*, donné le principe de sa mesure et quelques valeurs de cette dureté relative à différents solides.

Voici un résumé des nouvelles recherches que nous avons effectuées en vue d'établir un parallèle entre les résultats obtenus en utilisant des pénétrateurs coniques, pyramidaux et sphériques.

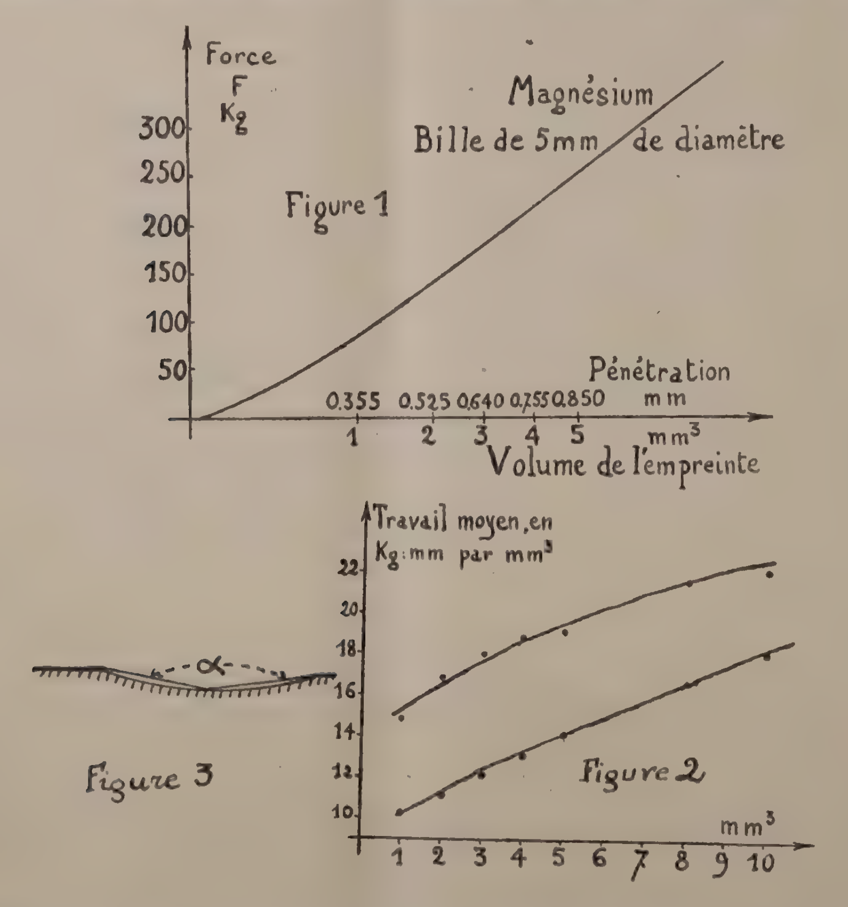
Méthode d'étude. — Les courbes force-pénétration ont été enregistrées. et utilisées pour le calcul dans les conditions indiquées précédemment (^{2}).

(^{1}) Séance du 14 janvier 1946.

(^{2}) *Comptes rendus*, 219, 1944, pp. 669-671.

Nous avons tout d'abord employé comme pénétrateurs un tétraèdre régulier, un trièdre trirectangle et les pyramides à base dodécagonale qui en dérivent; les angles au sommet des cônes qui sont tangents intérieurement à ces dernières ayant respectivement pour valeurs 68° 40′ et 107° 40′. Nous avons fait ensuite des expériences avec une pyramide à base carrée d'angle au sommet entre faces opposées égal à 136° 30′, et avec une pyramide à base octogonale telle que le cône tangent intérieurement ait un angle au sommet de 146° 10′. Enfin nous nous sommes servis de billes de différents diamètres (5, 10 et 20 mm).

Résultats. — Avec les pénétrateurs pyramidaux, les courbes enregistrées en faisant des empreintes sur différents solides, aluminium, cuivre,



magnésium etc., sont, comme celles que l'on obtient en utilisant des pénétrateurs coniques, des paraboles, pour lesquelles la force F est liée à la pénétration p par la relation $F = kp^2$. La constante k a une valeur intermédiaire entre celles qui correspondent aux cônes tangents intérieurement et extérieurement à chacune des pyramides utilisées. L'effet d'entaille, qui se manifeste pendant la pénétration avec d'autant plus d'intensité que l'angle du dièdre formé par deux faces de la pyramide est plus aigu,

n'introduit donc pas d'anomalie dans le classement de ces trois valeurs.

Avec les billes, les courbes force-pénétration diffèrent d'une parabole. A l'aide de courbes telles que celles de la figure 1, nous avons déterminé, par la planimétrie, le travail moyen, exprimé en kg/mm par mm^3, que nécessite le refoulement progressif du solide quand cette opération intéresse successivement 1, 2, 3, ... mm^3 de matière (*fig.* 2).

Si l'on calcule les valeurs des différents angles tels que α (*fig.* 3) qui correspondent à un refoulement de 1, 2, 3, ... mm^3 de matière, on peut lire ensuite, sur les courbes établies antérieurement [2], le travail en kg/mm par mm^3 que l'on ferait dans ces différents cas avec un cône ayant un angle au sommet égal à l'angle α considéré. L'exemple de la figure 2 et d'autres exemples relatifs à différents solides nous permettent de penser qu'il existe une analogie assez marquée entre les phénomènes qui interviennent dans le billage et ceux qui résulteraient, si cela était possible, de l'utilisation d'un cône dont l'angle au sommet se fermerait progressivement au cours de l'enfoncement. La bille semble donc être, *a priori*, comme l'avait remarqué Bouasse [3] un pénétrateur *singulièrement mal choisi*. Si la pyramide ou le cône donnent une empreinte dont la surface reste semblable à elle-même quel que soit l'enfoncement, le cône paraît préférable à la pyramide en raison de la symétrie de révolution qu'il présente et de l'absence d'effet d'entaille ailleurs qu'au sommet.

De l'ensemble des études que nous avons faites se dégage la conclusion suivante : Puisque les valeurs que l'on obtient dans la mesure de la dureté évaluée par une méthode de pénétration dépendent de la forme du pénétrateur et des conditions de son emploi, on peut penser que la notion de dureté relative à cette méthode ne correspond pas à une grandeur physique bien déterminée, mais à un complexe de grandeurs. Ces dernières sont, vraisemblablement, liées aux phénomènes d'élasticité, de plasticité, de frottement etc. qui interviennent au cours de la pénétration.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Étude statistique de la turbulence : corrélation et spectres dans un écoulement homogène* [1]. Note de M. **François N. Frenkiel.**

Soit $u'(x, y, z, t)$ la composante de la vitesse turbulente parallèle à la direction de la vitesse moyenne $\overline{u}$ [2]. On caractérise partiellement la

(3) *Résistance des matériaux*, Paris, p. 486.

(1) Travail effectué à Toulouse en 1941 dans la clandestinité avant la déportation de l'auteur.

(2) La barre représente une moyenne prise sur les expériences pour lesquelles change seul l'instant initial $\overline{\Psi(X, Y, Z, t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (X, Y, Z, s)\, ds$.

turbulence par la moyenne quadratique $\overline{u'^2}$, le coefficient de corrélation

$$R = \frac{\overline{u'(x_1, y_1, z_1, t_1)\, u'(x_2, y_2, z_2, t_2)}}{\sqrt{\overline{[u'(x_1, y_1, z_1, t_1)]^2}}\sqrt{\overline{[u'(x_2, y_2, z_2, t_2)]^2}}}$$

en fonction d'une des variables, la longueur de corrélation $L = \int_0^\infty R(s)\, ds$ et le spectre $f(\omega)$ qui représente la répartition de l'énergie turbulente $1/2(\rho \overline{u'^2})$ (ρ masse spécifique) en fonction de la fréquence cyclique ω. Dans le système d'Euler, on obtient la corrélation au point fixe $R_t(h)$ et le spectre de G. I. Taylor $f_t(\omega)$. On peut aussi étudier la corrélation $R_\Delta(r)$ entre les u' simultanées à deux points distants de r et placés sur une droite de direction Δ et le spectre $f_\Delta(\omega)$. Quand $\Delta \parallel Ox$, on a la corrélation longitudinale $R_x(x)$ et le spectre longitudinal $f_x(\omega)$, et quand $\Delta \perp Ox$, on aura la corrélation transversale $R_y(y)$ et le spectre transversal $f_y(\omega)$. Dans le système de Lagrange on trouve, en suivant les particules, la corrélation $R_{tL}(h)$ et le spectre de J. Kampé de Feriet $f_{tL}(\omega)$. On peut aussi définir les corrélations $R_{\Delta L}(r)$, $R_{xL}(x)$, $R_{yL}(y)$ et les spectres $f_{\Delta L}(\omega)$, $f_{xL}(\omega)$, $f_{yL}(\omega)$. En suivant l'écoulement moyen (système pseudo-eulérien), on aura les fonctions $R_m(h)$ et $f_m(\omega)$.

Dans l'écoulement de turbulence homogène où les moyennes temporelles sont égales aux moyennes spatiales, les u' sont égaux dans tous les systèmes étudiés. Soient P, Q, R, S des points de l'écoulement et A, B, ..., G des particules. On aura $\overline{u'^2}\, R_\Delta(r) = \overline{u'_P(t)\, u'_Q(t)}$, cette moyenne étant formée par des produits tels que $u'_P(t)u'_Q(t)$, $u'_P(t+h)u'_Q(t+h)$, ..., ou bien par $u'_P(t)u'_Q(t)$, $u'_R(t)u'_S(t)$, ... D'autre part $\overline{u'^2}\, R_{\Delta L}(r) = \overline{u'_A(t)\, u'_B(t)}$ peut être obtenu en se basant sur $u'_A(t)u'_B(t)$, $u'_A(t+h)u'_G(t+h)$, ..., ou bien en employant $u'_A(t)u'_B(t)$, $u'_C(t)u'_D(t)$, ... Il en résulte que

$$R_\Delta(r) = R_{\Delta L}(r). \tag{1}$$

G. I. Taylor ([3]) trouve, en admettant $u' \ll \overline{u}$, les équations

$$f_t(\omega) = \frac{2}{\pi \overline{u}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\omega s}{\overline{u}}\right) R_x(s)\, ds, \qquad R_x(x) = \int_0^\infty \cos\left(\frac{s x}{\overline{u}}\right) f_t(s)\, ds. \tag{2}$$

Dans le système de Lagrange, J. Kampé de Feriet ([4]) trouve

$$f_{tL}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\omega s)\, R_{tL}(s)\, ds, \qquad R_{tL}(h) = \int_0^\infty \cos(sh)\, f_{tL}(s)\, ds. \tag{3}$$

On peut de même obtenir les relations, entre $R_t(h)$ et $f_t(\omega)$, analogues à (3) sans qu'il soit nécessaire d'admettre que la vitesse turbulente soit petite. On

(3) *Proc. Roy. Soc. London*, A, **164**, 1938, p. 476.
(4) *Ann. Soc. Scient. Brux.*, 1re série, **59**, 1939, p. 145.

aura des équations analogues pour $R_x(x)$ et $f_x(\varpi)$. Aux relations approchées (2) correspondent alors les équations exactes

$$(4)\qquad f_x(\varpi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\varpi s\, R_x(s)\,ds, \qquad R_x(x) = \int_0^\infty \cos\left(\frac{x\varpi}{\bar u}\right) f_x(\varpi)\,d\varpi.$$

En comparant les courbes expérimentales $f_t(\varpi)$ et $R_x(x)$, Taylor a montré [4] que dans l'écoulement qu'il a étudié les équations (2) sont vérifiées. J'en déduis que dans ce cas particulier on aura

$$(5)\qquad f_t(\varpi) = f_x(\varpi), \qquad R_t(h) = R_x(h\bar u).$$

Pour les expériences de A. A. Kalinske et E. R. Van Driest [5], on a trouvé $R_t(h) \neq R_x(h\bar u)$ (entre les composantes v). Les expériences de E. G. Richardson [6] montrent que $R_t(h)$ est déjà différent de l'unité pour des valeurs de $h\bar u$ auxquelles correspond un $R_x(h\bar u)$ assez grand. J'en déduis que $R_t(h) \neq R_x(h\bar u)$. Pour ces deux séries d'expériences les équations (2) ne seront donc pas vérifiées.

Au lieu de demander que u soit petit par rapport à $\bar u$, on peut exiger que $R_m(h)$ reste encore très proche de l'unité quand $R_x(h\bar u)$ est déjà négligeable. Ceci se produira quand le coefficient sans dimension

$$(6)\qquad -\frac{L_x}{\bar u}\sqrt{\frac{d^2 R_m(0)}{dh^2}} \qquad \left[L_x = \int_0^\infty R_x(s)\,ds\right]$$

sera très petit. Cette condition peut être considérée comme un critère de l'exactitude des équations (2) de Taylor.

RELATIVITÉ. — *Équations générales de l'hydrodynamique des fluides parfaits.* Note [1] de M. **Olivier Costa de Beauregard**, présentée par M. Henri Villat.

Si ρ_0, V^i et $-f^i$ désignent la densité massique propre, la quadri-vitesse et la quadri-densité de force d'inertie d'un fluide, nous avons montré que si l'on fait la double hypothèse

$$(1)\qquad f^i = \partial^i \varpi, \qquad V_i f^i = 0,$$

le fluide est incompressible, et qu'il admet des lignes et des tubes de courant d'Univers le long desquels V_i reste irrotationnel [2]. Soient alors σ le débit densitaire d'une distribution continue de sources ou de puits, non nul seulement à l'intérieur de certaines régions de l'espace-temps, et τ^{ij} la valeur de $\partial^i V^j - \partial^j V^i$

(5) Vth *Intern. Cong. Appl. Mech.*, Cambridge (U. S. A.), 1938, p. 416.
(6) *Ibid.*, 1938, p. 382.

(1) Séance du 4 février 1946.
(2) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 271.

en un point d'un tube d'Univers tourbillonnaire; le champ V^i satisfait par hypothèse aux deux équations

$$(2) \qquad \partial_i V^i = \sigma, \qquad \partial^j V^i - \partial^i V^j = \tau^{ij};$$

on voit que τ^{ij} satisfait identiquement à la relation

$$(3) \qquad \sum \partial^i \tau^{jk} = 0,$$

dans laquelle la sommation s'entend par permutation circulaire.

Cela étant, le premier problème consistera à déterminer le champ V^i à partir des (2) (³). Il dérive de deux potentiels, l'un scalaire P et l'autre tenseur antisymétrique R^{ij} satisfaisant à

$$(4) \qquad \sum \partial^i R^{jk} = 0,$$

suivant

$$(5) \qquad V^k = \partial^k P + \partial_l R^{kl};$$

en effet, portant (5) dans les (2) et tenant compte de (4), il vient

$$(6) \qquad \partial_i^i P = \sigma, \qquad \partial_i^i R^{kl} = \tau^{kl},$$

qui sont les généralisations d'équations bien connues de la théorie classique; la solution de (6_2) satisfait bien à (4) en vertu de (3). Appliquant aux deux membres de (5) l'opérateur ∂_i^i, et tenant compte des (6), il vient

$$(7) \qquad \partial_i^i V^k = \partial^k \sigma + \partial_l \tau^{kl};$$

les équations (6) et (7) admettent les solutions *retardées* du type bien connu.

L'on peut à nouveau faire dériver P et R^{kl} d'un quadrivecteur A^i. La condition (4), qui a été satisfaite, montre que R^{ij} est un rotationnel, défini à un quadri-gradient près; en résolvant l'équation $\partial_i^i Y_0 = P - \partial_i A_0^i$, on fera en sorte d'avoir à la fois

$$(8) \qquad P = \partial_i A^i, \qquad R^{ij} = \partial^j A^i - \partial^i A^j.$$

Enfin, de (8) et (5) on conclut la relation

$$(9) \qquad \partial_i^i A^i = V^i,$$

qui achève de montrer que A^i est la généralisation relativiste du potentiel-vecteur de Poincaré; sa quadri-divergence est nulle en l'absence de sources ou de puits.

Le second problème consiste en le calcul de la densité de force d'Univers appliquée par le champ V^i aux distributions σ et τ^{ij}. En faisant jouer les rela-

(³) La donnée des distributions σ et τ^{ij} n'est pas absolument arbitraire, parce que le champ V^i satisfait par hypothèse à la relation $V_i V^i = -U$.

tions $\rho_0 = \text{const.}$, $f^i = \partial_j(\rho_0 V^i V^j)$, et $V_i V^i = -c^2$, on écrit ([4])

$$f^i = \rho_0(\sigma V^i + \tau^{ij} V_j). \tag{10}$$

Formant l'expression $\partial_i f^i$, et tenant compte de (1_1), il vient l'équation

$$\partial_i^i \varpi = \rho_0 \left\{ \sigma^2 - \frac{1}{2}\tau_{ij}\tau^{ij} + V_i(\partial^i \sigma - \partial_k \tau^{ik}) \right\}, \tag{11}$$

dont la ( ) contient les mêmes tenseurs que le second membre de (7), mais avec un changement de signe; on voit que les distributions σ et τ^{ij} sont, au sens large, des *sources* pour la pression ϖ.

Les équations précédentes constituent l'extension relativiste, valable dans le cas général du régime variable, d'équations, pour la plupart bien connues, de l'hydrodynamique des fluides parfaits. Elles offrent théoriquement l'intérêt de concrétiser l'exemple d'un champ transmetteur de forces, au sein duquel les perturbations se propagent à la vitesse limite c, et dont les équations tensorielles diffèrent absolument de celles de l'électromagnétisme; cela malgré certaines similitudes très poussées qui apparaissent sur les écritures vectorielles d'espace, et lorsqu'on sépare le cas irrotationnel du cas lamellaire.

ASTRONOMIE STELLAIRE. — *Sur les magnitudes absolues des étoiles à hélium.* Note ([1]) de M. **Pierre Guintini**, présentée par M. Ernest Esclangon.

La détermination des magnitudes absolues moyennes des étoiles à hélium, qui présente un grand intérêt en statistique stellaire, a déjà été effectuée par de nombreux auteurs; mais les résultats obtenus ne sont pas exempts de critiques.

J'ai repris cette étude en partant des vitesses radiales et des mouvements propres tirés respectivement des catalogues de Moore et de Boss. La méthode que j'ai employée, voisine de celle appliquée par M. Henri Mineur aux Céphéides ([2]), consiste à partir de magnitudes absolues moyennes approchées et à calculer les corrections à leur apporter.

La vitesse radiale ρ d'une étoile peut s'écrire, en tenant compte de la rotation galactique,

$$\rho = K + X_0\alpha_1 + Y_0\beta_1 + Z_0\gamma_1 + 2A_1 r_v \alpha_1\beta_1 + A_2 r_v(\beta_1^2 - \alpha_1^2). \tag{1}$$

Dans cette relation r_v est la distance vraie, $-X_0$, $-Y_0$, $-Z_0$ sont les

([4]) M. E. Durand a indiqué la forme du second terme de f_i. Le premier terme correspond au débit d'impulsion dû aux sources ou aux puits; dans les régions où il n'est pas nul, on a $V_i f^i = -c^2\rho_0\sigma$; on voit ainsi que l'hypothèse (1_2), ainsi d'ailleurs que l'expression $\partial_i V^i = 0$ de l'incompressibilité, sont essentiellement formulées pour le cas d'absence de sources ou de puits.

([1]) Séance du 4 février 1946.

([2]) *Comptes rendus*, 220, 1945, p. 445.

composantes de la translation solaire suivant trois axes galactiques; α_1, β_1, γ_1, sont, par rapport à ces axes, les cosinus directeurs de la direction qui joint le Soleil à l'étoile.

Nous avons posé

$$A_1 = A\cos 2l_0, \qquad A_2 = A\sin 2l_0;$$

A est la constante de la rotation différentielle de Oort, l_0 est la longitude du centre galactique.

La plupart des auteurs supposent X_0, Y_0, Z_0, constants et indépendants de la catégorie d'étoiles considérée, ils écrivent en retranchant de la vitesse radiale les termes de translation solaire

$$(1') \qquad \rho' = K + A\bar{r}\sin 2(l - l_0)\cos^2 b \qquad (b,\ \text{latitude galactique}).$$

Les valeurs adoptées pour l_0 varient entre 325° et 330°.

La résolution des équations (1′) se ramène à celle d'un système à deux inconnues K et $A\bar{r}$, qui peut être effectuée par la méthode des moindres carrés. Si A est connu on obtient $\bar{r}$, distance moyenne des étoiles étudiées, dont on peut déduire la magnitude absolue moyenne.

Cette dernière façon de procéder présentant plusieurs inconvénients, j'ai traité directement le système (1).

Soient r_a, la distance provisoire d'une étoile, correspondant à la magnitude absolue M, r_v la distance vraie correspondant à la magnitude absolue $M + \delta M$, δM est la correction que nous nous proposons de déterminer.

Posons $r_v = \lambda r_a$. Chaque étoile nous donne une équation (1). En traitant par la méthode des moindres carrés le système des N équations, données par les N étoiles étudiées, nous obtenons K, X_0, Y_0, Z_0, $A_1\lambda$, $A_2\lambda$.

De $A_1\lambda$ et $A_2\lambda$, nous pouvons tirer l_0, mais λ ne sera déterminé que si A est connu.

D'autre part, les mouvements propres en longitude galactique nous donnent

$$(2) \quad \mu_l \cos b = \frac{X_0}{4{,}74\lambda r_a}\alpha_2 + \frac{Y_0}{4{,}74\lambda r_a}\beta_2 + \frac{A_1}{4{,}74}(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) + \frac{A_2}{4{,}74}(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2) + \frac{B}{4{,}74}\cos b;$$

α_2, β_2 sont les cosinus directeurs de la tangente au cercle de latitude galactique; B est la constante de rotation absolue de Oort.

La résolution du système (2) donne X_0/λ, Y_0/λ, A_1, A_2, B.

Pour les étoiles qui ne sont pas trop éloignées, on peut négliger les termes de rotation galactique.

Par comparaison avec X_0, Y_0, tirés des vitesses radiales, on obtiendra λ, d'où l'on tire la correction δM.

On pourra également tirer λ du facteur $A\lambda$ des vitesses radiales; A étant donné par la résolution des équations (2).

J'ai appliqué ces méthodes aux étoiles à hélium de sous-types O à B_5.

Les distances provisoires r_a étaient données directement par une table. Cette table a été construite en supposant l'absorption visuelle dans le plan galactique égale à $0^m,35$ °/₀₀ parsecs et indépendante de la longitude, la densité de la matière absorbante étant répartie suivant une loi de Gauss en fonction de la distance au plan galactique.

Le tableau ci-dessous donne le résumé des résultats obtenus.

Sous-type spectral.	M. départ.	λ					δM.		M (adopté).
		(X_0).	$(Y)_0$.	moy. pondérée.	tiré de Aλ.	adopté.			
O.............	—4,5	0,42±0,18	0,49±0,45	0,43±0,17	0,72±0,15	0,60±0,12	+1,2		—3,3
B_0.............	—3,9	1,17±0,36	0,57±0,30	0,81±0,23	–	–	–		—3,3
B_1.............	—3,6	1,55±0,50	0,37±0,42	0,86±0,32	–	–	–		—3,0
B_0 et B_1.......	–	1,47±0,46	—0,29±0,34	0,33±0,27	1,04±0,19	0,80±0,16	+0,6		
$B_2(r_a < 0,4)$...	—3,0	1,15±0,23	1,41±0,53	1,19±0,21	–	–	—0,4	+0,6	—2,4
$B_2(r_a > 0,4)$...	—3,0	1,85±0,97	0,21±0,22	0,29±0,21	1,07±0,30	0,55±0,17	+1,4		
$B_3(r_a < 0,3)$...	—2,2	0,70±0,04	1,10±0,15	0,75±0,04	1,02±0,13	0,77±0,05	+0,6		—1,6
$B_3(r_a > 0,3)$...	—2,2	0,87±0,13	0,86±0,12	0,87±0,12	0,58±0,17	0,78±0,10	+0,6		—1,6
B_3e...........	—2,2	0,96±0,12	0,67±0,26	0,83±0,10	0,65±0,33	0,86±0,09	+0,3		—1,9
$B_5(r_a < 0,3)$...	—1,6	0,91±0,06	1,39±0,19	0,95±0,06	–	–	+0,1	+0,4	—1,2
$B_5(r_a > 0,3)$...	—1,6	0,86±0,09	0,34±0,15	0,71±0,08	0,76±0,21	0,72±0,07	+0,8		

GRAVITATION. — *Sur la mesure absolue de la gravité.*

Note de M. Charles Volet, présentée par M. Albert Pérard.

Deux méthodes ont été proposées jusqu'ici en vue de déterminer l'accélération due à la pesanteur. La plus directe consiste à étudier le mouvement de chute libre d'un corps; l'autre utilise la loi qui régit les oscillations d'un pendule.

Cette dernière méthode a été jusqu'à aujourd'hui exclusivement utilisée dans les déterminations fondamentales, grâce à la faculté qu'elle donne de prolonger suffisamment l'expérience pour obtenir l'exactitude requise dans la mesure du temps. Par contre elle s'accompagne de grandes difficultés dans la détermination de la longueur du pendule simple synchrone.

Les expérimentateurs qui se sont servis du pendule ont successivement mis en évidence diverses causes d'erreurs et ont exécuté, à leur sujet, des recherches dont les résultats n'ont pas toujours été concordants. On peut citer, parmi ces actions perturbatrices, l'influence de l'air, la courbure des couteaux, leur glissement, leur déformation sous l'action de la charge et du mouvement du pendule, la flexion élastique de celui-ci, l'entraînement du support, l'influence de l'amplitude etc.

En fait, les progrès accomplis depuis un demi-siècle dans la détermination absolue de g résultent plus de la recherche des lois du mouvement réel du pendule que d'une amélioration foncière dans la mesure des longueurs ou du temps. Et il semble que l'on soit arrivé, par ce moyen,

au maximum de précision compatible avec la nature de l'instrument. Cette précision est estimée actuellement à environ $\pm 2.10^{-6}$, alors que les longueurs, comme le temps, peuvent être mesurés, dans de bonnes conditions, à quelques dix-millionièmes près. Un progrès paraît donc encore possible.

Les perfectionnements apportés dans la mesure des courts intervalles de temps permettent de préconiser maintenant l'emploi de la méthode de la chute d'un corps. Amédée Guillet a déjà recommandé ce procédé (1) et insisté, avec beaucoup de perspicacité, sur ses avantages, dont le principal réside certainement dans l'absence de toute correction à apporter à la loi du mouvement, pourvu que celui-ci se fasse dans un vide même modéré. Mais les dispositifs mis en œuvre par cet expérimentateur ne lui ont pas permis de tirer tout le parti possible de la méthode. Par exemple, l'observation de l'instant du départ du corps qui tombe est extrêmement difficile par le fait que, à cette époque, la vitesse est nulle. La détermination des espaces parcourus par report sur une échelle verticale voisine pose aussi un problème très délicat, assez mal résolu par le moyen d'un appareil photographique qui tombe en même temps que le corps. D'autre part la mesure d'un petit intervalle de temps par l'enregistrement des élongations d'un diapason ne saurait se faire avec toute la précision nécessaire à notre but.

Il m'a paru que l'on pouvait conférer à la méthode de la chute libre le maximum de valeur métrologique en laissant tomber, verticalement, la règle graduée elle-même. La mesure du temps est obtenue par rapport à une échelle chronométrique réalisée par le moyen d'un quartz étalon dont les vibrations sont enregistrées sur un film sous la forme de plages alternativement noires et blanches permettant une interpolation précise. Quant aux espaces parcourus, deux procédés peuvent être envisagés pour les déterminer. On peut cinématographier la règle qui tombe en provoquant une succession d'éclairs extrêmement brefs (de l'ordre du millionième de seconde) qui, simultanément, s'impriment sur l'échelle du temps, ou bien enregistrer, sur cette même échelle, le passage des traits de la règle en coïncidence avec un repère approprié, en utilisant les ressources apportées par les cellules photoélectriques et les oscillographes cathodiques par exemple.

Dans le premier cas, les photographies successives de la division et d'un repère permettent, moyennant une interpolation, de déterminer les hauteurs de chute correspondant à chaque éclair. Dans le deuxième cas, c'est l'instant du passage de chaque trait qui est repéré directement sur l'échelle des temps.

---

(1) *Comptes rendus*, **165**, 1917, p. 1050; **207**, 1938, p. 614.

L'expérience aura une durée d'environ une demi-seconde et la précision réalisable pour la mesure de ce laps de temps dépasse actuellement 10^{-6}; il en est de même pour la mesure des espaces parcourus. Il semble donc possible d'atteindre ainsi une précision au moins égale à celle que donnent les meilleures observations par le pendule.

De toute façon une mesure précise par une méthode entièrement différente de la méthode habituelle ne peut être que souhaitable pour une constante aussi importante que celle de la gravitation, qui joue, en particulier, un rôle fondamental dans le rattachement des unités électriques absolues aux unités mécaniques. Une telle détermination est actuellement à l'étude.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Quelques formules relatives aux ondes planes de corpuscules de spin $nh/4\pi$.* Note (1) de M. **Jacques van Isacker.**

1. Le but de cette Note est de donner une forme explicite de l'onde plane monochromatique d'une particule de spin quelconque et de calculer certaines expressions qui interviennent dans le calcul des perturbations.

2. Les équations d'une particule, de spin maximum $nh/4\pi$ et de masse minimum $h\varkappa_0/2\pi c$, soumise à un champ électro-magnétique donné par son potentiel 4-vecteur φ, s'écrivent

$$\left[\sum_k \Gamma^k\left(\frac{\partial_k + ie\,\varphi_k}{c}\right) + n\varkappa_0\right]\psi = 0. \tag{1}$$

Lorsque la particule est libre on peut décomposer ψ en parties correspondant à des masses déterminées $h\varkappa/2\pi c$, $\varkappa = n\varkappa_0/n - 2\nu$, qui vérifient les équations (2)

$$\left(i\underset{(m)}{\mathrm{A}}\,\mathrm{grad} + \partial_4 \pm \underset{(m)}{\mathrm{A}^4}\varkappa\right)\psi = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Rappelons qu'il faut prendre $n - \nu$ fois le signe + et ν fois le signe —. Les matrices $\underset{(m)}{\mathrm{A}^i}$ s'obtiennent par fusion à partir des matrices α de Dirac, construites elles-mêmes avec les matrices σ de Pauli

$$\underset{(m)}{\mathrm{A}^i} = \underset{(1)}{\mathrm{I}} \times \ldots \times \underset{(m)}{\alpha^i} \times \ldots \times \underset{(n)}{\mathrm{I}}.$$

Pour obtenir un système complet de solutions, il faudra prendre simultanément les solutions de tous les systèmes (2).

3. Les 2^n ondes planes à énergie positive satisfaisant aux équations (2) seront de la forme

$$\psi_{\mu_1\ldots\mu_n} = \mathfrak{A}_{\mu_1\ldots\mu_n}\exp i(k_0 ct - \overline{k}\overline{x}) \qquad (\mu = 1, \ldots, 4) \tag{3}$$

(1) Séance du 4 février 1946.

(2) *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 51.

avec

$$(4)\qquad k_0 = (k^2 + \varkappa^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad (\underset{(m)}{\overline{\mathrm{A}}}\overline{k} + k_0 \pm \underset{(m)}{\mathrm{A}^4}\varkappa)\mathfrak{A} = 0.$$

On peut mettre $\mathfrak{A}$ sous la forme plus explicite

$$(5)\qquad \mathfrak{A}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \varepsilon^{\tau_1 \dots \tau_n}_{\mu_1 \dots \mu_n} \mathrm{A}_{\tau_1 \dots \tau_n}, \qquad \Sigma|\mathrm{A}|^2 = 1 \qquad (\tau = 1, 2),$$

les ε étant des matrices rectangulaires de la forme ([3]).

$$(6)\qquad \varepsilon^{\tau_1 \dots \tau_n}_{\mu_1 \dots \mu_n} = [2^n \varkappa^{n-1} k_0 (k_0 + \varkappa)^n]^{-\frac{1}{2}} \underset{\pm}{\varepsilon^{\tau_1}_{\mu_1}} \times \underset{\pm}{\varepsilon^{\tau_2}_{\mu_2}} \times \dots \times \underset{\pm}{\varepsilon^{\tau_n}_{\mu_n}}.$$

Dans cette expression les signes $\pm$ correspondent à ceux des équations (2) et (4); on a ([4])

$$(7)\qquad \underset{+}{\varepsilon^{\tau}_{\mu}} = \left(\begin{vmatrix} \overline{\sigma} \\ 0 \end{vmatrix} \overline{k} - (k_0 + \varkappa) \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)^{\tau}_{\mu}, \qquad \underset{-}{\varepsilon^{\tau}_{\mu}} = \left(\begin{vmatrix} 0 \\ \overline{\sigma} \end{vmatrix} \overline{k} - (k_0 + \varkappa) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right)^{\tau}_{\mu}.$$

4. Ces ε jouissent de propriétés remarquables résumées dans le tableau suivant :

$$\underset{+}{\varepsilon^{+}} \alpha^4 \underset{+}{\varepsilon'} = \underset{-}{\varepsilon^{+}} \alpha^4 \underset{-}{\varepsilon'} = \varkappa\varkappa'[(\eta+1)(\eta'+1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{P},$$

$$\underset{+}{\varepsilon^{+}} \underset{+}{\varepsilon'} = - \underset{-}{\varepsilon^{+}} \underset{-}{\varepsilon'} = - \varkappa\varkappa'[(\eta+1)(\eta'+1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{Q},$$

$$\underset{+}{\varepsilon^{+}} \alpha^4 \underset{-}{\varepsilon'} = \underset{-}{\varepsilon^{+}} \alpha^4 \underset{+}{\varepsilon'} = \varkappa\varkappa'[(\eta+1)(\eta'+1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{R},$$

$$\underset{+}{\varepsilon^{+}} \underset{-}{\varepsilon'} = - \underset{-}{\varepsilon^{+}} \underset{+}{\varepsilon'} = - \varkappa\varkappa'[(\eta+1)(\eta'+1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{S},$$

$$\mathrm{P} = \sqrt{(\eta+1)(\eta'+1)} + \sqrt{(\eta-1)(\eta'-1)} \cos\Theta + i\sqrt{(\eta-1)(\eta'-1)} \sin\Theta\Phi,$$

$$\mathrm{Q} = \sqrt{(\eta+1)(\eta'+1)} - \sqrt{(\eta-1)(\eta'-1)} \cos\Theta - i\sqrt{(\eta-1)(\eta'-1)} \sin\Theta\Phi,$$

$$\mathrm{R} = -\sigma^3\left(\sqrt{(\eta-1)(\eta'+1)} + \sqrt{(\eta+1)(\eta'-1)} \cos\Theta + i\sqrt{(\eta+1)(\eta'-1)} \sin\Theta\Phi\right),$$

$$\mathrm{S} = \sigma^3\left(\sqrt{(\eta-1)(\eta'+1)} - \sqrt{(\eta+1)(\eta'-1)} \cos\Theta - i\sqrt{(\eta+1)(\eta'-1)} \sin\Theta\Phi\right),$$

$$\eta = \frac{k_0}{\varkappa}, \qquad \eta' = \frac{k_0}{\varkappa'}, \qquad \Phi = \sigma^1 \sin\varphi - \sigma^2 \cos\varphi.$$

Dans ces formules ε^{+} représente l'adjointe de ε, c'est-à-dire la conjuguée hermitique multipliée par α^4. ε et ε' correspondent à deux états de même énergie; dans le premier la vitesse est parallèle à l'axe Oz; dans le second la vitesse est donnée par les deux angles polaires Θ et φ.

Ces expressions interviennent dans le calcul des perturbations, notamment dans la recherche de la section efficace de diffusion par une particule électrisée.

([3]) GEHENIAU, *Comptes rendus*, **209**, 1939, p. 87; *Revue de l'A. F. A. S., Congrès de Liége*, 1939.

([4]) PETIAU, *Journal de Physique*, 9, 1938, p. 171. Voir aussi *Comptes rendus*, **216**, 1943, p. 196.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Les expanseurs.*
Note [1] de M. **Jacques Courtois.**

Sous le nom d'*expansors* M. Dirac [2] a défini des *représentations du groupe de Lorentz*, à une infinité dénombrable de composantes dans l'espace-temps ordinaire. Ce sont en fait des *représentations du groupe affine* (tenseurs généralisés), que nous allons définir dans un espace à un nombre quelconque, fini ou infini dénombrable, de dimensions. Pour la commodité de l'exposé, nous nous limitons aux *expanseurs homogènes symétriques*.

Soient l un indice déterminé, i un indice prenant toutes les valeurs différentes de l, $\vec{a}$ et $\vec{x}$ deux vecteurs tels que $a_l \neq 0$, $x^l \neq 0$. On a

$$\vec{a}.\vec{x} = a_l x^l + a_i x^i$$

et

$$\left(\vec{a}.\vec{x}\right)^{-u} = (a_l x^l)^{-u}\left[1 + (a_l x^l)^{-1} a_i x^i\right]^{-u},$$

soit, sous réserve de convergence,

$$(1) \qquad \left(\vec{a}.\vec{a}\right)^{-u} = \sum_{n_i} (-1)^{\Sigma_i n_i} \frac{(n_l - 1)!}{(u-1)!\,\Pi_i(n_i!)} (a_l x^l)^{-n_l} \Pi_i (a_i x^i)^{n_i},$$

avec

$$-n_l + \Sigma_i n_i = -u.$$

Les coefficients

$$(2) \qquad a_l^{-n_l} \Pi_i (a_i^{n_i}) = A_{-n_l, n_i}$$

définissent la représentation cherchée. Soit un changement de coordonnées

$$a'_{l'} = c^l_{l'} a_l + c^i_{l'} a_i, \qquad a'_{i'} = c^l_{i'} a_l + c^i_{i'} a_i.$$

Les nouvelles quantités $A'_{-n_{l'}, n_{i'}}$ s'expriment en fonction des anciennes en remplaçant $a'^{-n_{l'}}_{l'}$ par la série correspondante. *Si ces séries convergent*, les nouvelles composantes sont des fonctions linéaires des anciennes [3]. Il en est ainsi lorsque les $c^i_{l'}$ sont suffisamment petits par rapport à $c^l_{l'}$, autrement dit lorsque la coordonnée (a_l) à laquelle on fait jouer un rôle privilégié est assez peu modifiée (sauf multiplication par un scalaire).

On appellera *expanseur* (homogène symétrique, d'ordre $-u$) tout système

(1) Séance du 4 février 1946.

(2) *Proc. Roy. Soc.*, A, 183, 1945, p. 284.

(3) Si au contraire les séries divergent, la relation entre les A' et les A est celle de coefficients de séries représentant la même fonction $\left(\vec{a}.\vec{x}\right)^{-u}$ dans des domaines différents (prolongement analytique). Par exemple, si l'on échange simplement l'indice l avec un autre, il n'y a aucune relation linéaire convergente entre les anciennes coordonnées et les nouvelles.

de composantes A_{n_l, n_i} (avec $-n_l + \Sigma_i n_i = -u$) se transformant, dans un changement de coordonnées, suivant la loi ainsi obtenue. L'expanseur (2) sera désigné par $(\vec{a})^u$. La loi de transformation est définie par l'invariance de la forme algébrique

$$\Sigma(-1)^{\Sigma_i n_i} \frac{(n_l - 1)!}{(u-1)!\,\Pi_i(n_i!)} A_{-n_l, n_i}\, x^{l-n_l} \Pi_i x^i(n_i). \tag{3}$$

Un changement de coordonnées particulier consiste à passer de a_l, a_i à a^l, a^i. x^l, x^i sont alors transformés en x_l, x_i. On obtient ainsi pour A des coordonnées entièrement contravariantes. On voit en même temps que $\vec{a}$ et $\vec{x}$ jouent ici le même rôle.

Le *produit scalaire* défini par M. Dirac est tel que

$$(\vec{a})^{-u}.(\vec{b})^{u} = (\vec{a}.\vec{b})^{-u}.$$

Ainsi (3) est l'expression de

$$A.(\vec{x})^{u}.$$

Dans l'espace-temps, en prenant uniquement des coordonnées contravariantes, avec $\vec{a}.\vec{x} = a^0 x^0 - a^1 x^1 - a^2 x^2 - a^3 x^3$ et en prenant pour l l'indice o, l'expression du carré scalaire est une forme *définie positive*. C'est le cas étudié par M. Dirac.

Nous avons jusqu'ici supposé u entier positif, mais u peut être *absolument quelconque*.

Un expanseur d'ordre p/q possède q déterminations. Vis-à-vis des affinités ou changements de coordonnées *réels*, ces déterminations, définies par continuité, sont *distinctes* et chacune est *uniforme*. Une rotation de 2π se réduit à la transformation identique. Il n'y a donc pas d'identification possible entre les expanseurs d'ordre demi-entier et les spineurs.

Les expanseurs d'ordre *irrationnel* ou *complexe*, définis comme précédemment, peuvent de même être uniformisés vis-à-vis des affinités ou changements de coordonnées réels.

Les expanseurs d'ordre *entier positif* ne peuvent être définis directement par la méthode indiquée. Ils s'obtiennent en formant le produit

$$(\vec{a}.\vec{x})^{u-1}\,(\vec{b}.\vec{x}).$$

Nous avons ainsi défini les expanseurs à partir du vecteur. La même méthode, appliquée au *spineur*, donne les *spinexpanseurs*, représentations infinies du seul *groupe de Lorentz*.

ÉLECTRICITÉ. — *Détermination du groupe des ensembles de n circuits couplés ayant mêmes fréquences propres qu'un ensemble donné de n circuits, les mailles de même rang des divers ensembles ayant même self-inductance, totale et de couplage, que la maille correspondante de l'ensemble initial.* Note de M. **Maurice Parodi**.

Nous adoptons les notations d'un travail antérieur ([1]); à un ensemble à n mailles indépendantes, on peut faire correspondre trois formes quadratiques T, U et F fonctions des quantités d'électricité x_i qui circulent dans les différentes mailles ainsi que des constantes de ces dernières l_{ik}, s_{ik}, r_{ik} ($l_{ik}=l_{ki}$, $s_{ik}=s_{ki}$, $r_{ik}=r_{ki}$) et trois matrices symétriques (T), (U) et (F) fonctions seulement de ces constantes.

En faisant le changement de variables

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k,$$

les formes quadratiques exprimées en fonction des y_k s'écrivent $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ et les matrices (T), (U) et (F) doivent être remplacées respectivement par les suivantes :

$$(1)\qquad (\mathfrak{T})=(A')(T)(A),\qquad (\mathfrak{U})=(A')(U)(A),\qquad (\mathfrak{F})=(A')(F)(A),$$

(A') étant la matrice transposée de $(A)=a_{ik}$.

Ces nouvelles matrices donnent les constantes de n circuits constituant de nouveaux ensembles que l'on obtiendra dans leur totalité en donnant aux a_{ik} toutes les valeurs possibles.

On sait, nous l'avons montré dans la Note précitée, que les ensembles à n mailles du groupe ainsi obtenu ont les mêmes fréquences propres que l'ensemble initial; nous allons indiquer maintenant la forme qu'il faut donner à (A) pour que les ensembles du groupe soient tels que les mailles qui les composent aient les mêmes self-inductances, totales et de couplage, que les mailles correspondantes de l'ensemble initial.

Il faut trouver une transformation caractérisée par une matrice (A) telle que

$$(A')(T)(A)=(T).$$

Or un théorème d'Hermite ([2]) nous apprend que si $(Q)=\alpha_{ik}$ est une matrice *symétrique* quelconque et (S) une matrice *symétrique gauche* également

---

([1]) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 281.

([2]) Turnbull, *The theory of determinants, matrices and invariants*, Londres, 1928, p. 159.

quelconque, la matrice

$$(R)=(Q+S)^{-1}(Q-S)$$

est telle que

$$(R')(Q)(R)=(Q).$$

Il suffira donc de prendre, puisque (T) est symétrique,

$$(A)=(T+S)^{-1}(T-S),$$

(S) étant une matrice *symétrique gauche quelconque* d'ordre n, pour obtenir la transformation qui conduit à l'invariance de (T).

En donnant aux éléments de (S) toutes les valeurs possibles, on obtiendra par la relation (1) les constantes des n mailles qui constituent des ensembles du groupe jouissant des propriétés demandées : invariance de l'équation aux fréquences propres et invariance des self-inductances, totales et de couplage, des mailles de même rang.

Remarque. — La même méthode s'appliquerait à la détermination du groupe d'ensembles à n mailles possédant les mêmes fréquences propres qu'un ensemble donné et soit les mêmes résistances, soit les mêmes capacités, totales et de couplage, que les mailles correspondantes de cet ensemble.

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Sur les valeurs propres multiples dans un guide d'onde électromagnétique.* Note [1] de M. **Théo Kahan.**

L'équation de propagation dans un guide d'onde électromagnétique rectiligne de section rectangulaire (x, y) a pour expression

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0,$$

l'amplitude du potentiel-vecteur étant par définition

$$A=\psi(x, y)\,Z(z),$$

$Z(z)$ étant une fonction périodique des z, comptés sur l'axe du guide. Si a et b sont les côtés de la section transversale, les valeurs propres sont définies par

$$k^2=\frac{\Delta\psi}{\psi}=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

m et n étant entiers.

L'exemple de la membrane rectangulaire montre qu'il peut se produire des valeurs propres multiples. Cela a lieu toutes les fois que le rapport des côtés a/b est rationnel, car alors l'équation

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=\frac{m'^2}{a^2}+\frac{n'^2}{b^2}$$

---

[1] Séance du 4 février 1946.

possède des solutions différentes de zéro pour les entiers m, m', n, n'. Pour un carré par exemple, $(a=b=1)$, une telle solution est $m'=n$, $n'=m$; les fonctions propres correspondantes étant respectivement

$$\psi(mn)=\sin m\pi x \sin n\pi y \quad \text{et} \quad \psi(nm)=\sin n\pi x \sin m\pi y \quad [\text{ondes TM}].$$

Le problème de la recherche des valeurs propres multiples revient alors au problème suivant de la théorie des nombres : combien de fois un nombre k^2 peut-il être représenté sous la forme d'une somme de

$$k^2=m^2+n^2$$

des deux carrés [2].

Les lignes nodales de la section transversale du guide (correspondant aux plans nodaux de celui-ci), de la fonction propre $\psi(mn)$ sont parallèles aux axes des coordonnées x, y. Dans le cas de valeurs propres multiples, des lignes nodales (et par suite des plans nodaux) très variées peuvent se présenter telles que les zéros de la fonction

$$\psi=\mathrm{A}\sin\pi mx \sin n\pi y+\mathrm{B}\sin\pi nx.\sin\pi my$$

(A, B coefficients quelconques) pour le carré. La fonction propre

$$\psi(13)+\psi(31)$$

offre, par exemple, une ligne nodale circulaire centrée sur l'axe du guide. La fonction propre

$$\psi(12)+\psi(21)=\sin n\pi x \sin 2\pi y+\sin 2\pi x.\sin\pi y$$

représente une oscillation avec lignes nodales diamétrales. Cette fonction nous offre donc la possibilité d'un guide d'onde de section triangulaire, car la ligne nodale diamétrale correspond, dans le guide, à un plan nodal diamétral, et rien n'empêche de substituer à ce plan nodal un plan conducteur séparant le guide carré en deux guides de section triangulaire complètement indépendant l'un de l'autre et offrant, par conséquent, deux voies de transmission absolument distinctes.

De même, deux plans diamétraux, correspondant à une certaine structure de fonction propre, partageront un guide de section carrée en quatre compartiments électriquement distincts. Ces remarques se généralisent sans peine.

On conçoit aisément que ce principe de superposition des fonctions propres multiples correspondant à des valeurs propres multiples, permette d'obtenir une grande variété de lignes nodales fermées (et par suite une grande multiplicité de modes de vibration) susceptibles d'être remplacées, dans le guide, par des surfaces (parois) conductrices appropriées.

---

(2) Voir par exemple BOREL et DRACH, *Introduction à la Théorie des Nombres et de l'Algèbre supérieure*; CAHEN, *Théorie des Nombres*.

ÉLECTROCHIMIE. — *Électrolyse d'un sel de cuivre en solution diluée.* Note de M. **Albert Nicol**, présentée par M. Pierre Jolibois.

L'électrolyse de solutions diluées de sels d'argent ayant montré un dépôt cathodique renfermant de l'oxyde [1], des expériences dans les mêmes conditions, avec le même dispositif, ont été entreprises pour un sel de cuivre. Les solutions de sulfate de cuivre électrolysées avaient des concentrations allant de N/200 à N/4000.

Dans le cas de l'argent, l'oxyde était entièrement dissous alors qu'ici de l'oxyde se dissout mais est présent également dans le dépôt. L'acidité toujours existante dans ces solutions pouvant être la cause de cette différence, ce qui conduisit à traiter des solutions de sulfate par de l'oxyde et à les électrolyser. Donc deux séries d'expériences : électrolyses au moyen d'électrodes en platine, de sulfate de cuivre pur ou de sulfate avec oxyde dissous.

Sur les solutions ne renfermant que du sulfate, les observations suivantes peuvent être faites.

Avec cathode tournante et agitation, il se dépose sur celle-ci des arborescences noires, qui, peu à peu, se détachent et tombent dans le fond du vase. Au bout d'un temps, qui se réduit à mesure que la concentration diminue, ce produit noir se transforme, prenant une couleur jaunâtre, ce que la présence de cuivre seul ne saurait expliquer.

En employant une électrode mobile dans le plan vertical, il fut possible de recueillir ce dépôt cathodique avant sa transformation. Rapidement essoré, l'examen du dépôt, au retour de l'essoreuse, fait voir autour du produit noir une bande bleue semblable à l'aspect de l'hydrate bleu. Lavé et conservé dans l'alcool absolu, le dépôt cathodique conserve l'aspect de masses noires et bleues.

Avec une cathode fixe et sans agitation, il se forme les mêmes arborescences noires alors que très rapidement un dépôt d'hydrates bleus se forme et tombe.

Ce n'est que pour une concentration plus grande que N/200 qu'une couche rouge et spongieuse de cuivre se dépose sur le produit noir.

Donc l'observation conclut à la présence d'oxyde de cuivre à la cathode. Les mesures suivantes conduisent à la même interprétation. Elles comportent :

la mesure de H dégagé en coulomètre, ce qui détermine le poids théorique du cuivre déposé selon les lois de Faraday ;

la pesée du précipité, dissolution de celui-ci dans l'acide nitrique et dosage du cuivre qu'il renferme ;

la neutralisation de l'oxyde dissous par une solution à N/10 de SO_4H_2 ; la marche de la neutralisation étant suivie par conductibilité.

---

(1) *Comptes rendus*, **221**, 1945, p. 491.

Normalité.	Poids du Cu farad (en mmg).	Poids du précipité (en mmg).	q.	q'.	Poids du Cu dosé.	Poids du Cu à l'état d'oxyde dissous.
N/200.......	26,1	25,4	25,4	16,3	22,3	0
N/500.......	25,5	23,9	23,9	15,5	18,3	0,41
	25,5	25,0	25,0	16,3	18	
N/1000......	28,3	20,3	20,3	13,2	12,4	1,15
	28,3	20,7	20,7	13,4	12,7	
N/2000......	26,6	16,3	16,3	10,6	10,2	5,2
	22,7	10,2	10,2	6,6	7,1	
	22,7	12,1	12,1	7,9	9,6	
N/4000......	11,1	2,3	2,3	1,5	1,9	5,2
	8,1	2	2	1,3	1,4	

q étant le poids de cuivre si tout le précipité était du cuivre et q' si tout le précipité était de l'hydrate. La comparaison des nombres q, q' et poids du cuivre dosé montre l'existence d'hydrate dans le précipité.

La deuxième série d'expériences porte sur des électrolyses de solutions de sulfate ayant dissous l'oxyde de cuivre. Ces solutions étaient agitées pendant une semaine à la température sensiblement constante de 16° avec CuO et $Cu(OH)_2$. Les déterminations, par conductibilité, de la teneur en oxyde donnèrent par litre et en milligrammes les résultats suivants :

	N/500.	N/1000.	N/2000.	N/4000.	N/8000.
CuO	1,1	0,6	0,7	1	1,4
$Cu(OH)_2$	7,8	2,5	–	1,4	2,3

La solution à N/200 a donné lieu par agitation avec CuO à la précipitation de sulfate basique. Il est possible que la solubilité relativement grande à la concentration de N/500 puisse trouver dans ce fait une explication.

D'autre part, il faut remarquer que la saturation n'est pas complète par rapport aux oxydes qui se forment par électrolyse, et ces diverses solutions sont capables d'en solubiliser une quantité plus grande.

Pendant l'électrolyse, l'hydrate bleu apparaît en petits flocons, ce qui permet de recueillir cet hydrate sur le filtre, accompagné d'une masse noirâtre.

Les mesures analogues aux premières confirment la présence d'hydrates.

Normalité.	Poids du Cu farad (en mmg).	Poids du précipité (en mmg).	q.	q'.	Poids du Cu dosé.	Poids du Cu à l'état d'oxyde dissous.
N/500.......	25,8	37,7	37,7	24,6	25,8	0
N/1000......	27,2	29,1	29,1	18,9	19,2	4,6
N/2000......	21,1	22,7	22,7	14,8	13,6	6,7
N/4000......	11,3	5,2	5,2	3,4	3,2	7,11

Pour une dilution atteignant N/2000, le cuivre est tout entier à l'état d'oxyde. Dans l'électrolyse de sels d'argent, pour les mêmes dilutions, de l'argent métallique se déposait encore.

L'électrolyse des solutions diluées de sulfate de cuivre montre donc la formation d'oxyde de cuivre dans le dépôt cathodique. Une partie de cet oxyde se dissout dans la solution; ceci a conduit à étudier la solubilité de l'oxyde dans ces solutions et à constater que la quantité d'oxyde en solution n'est pas négligeable; de plus, par l'électrolyse, on le dissout davantage et plus rapidement que par l'agitation mécanique.

ÉLECTROTECHNIQUE. — *Sur l'étude des régimes transitoires dans le fonctionnement des machines électriques tournantes à courants alternatifs polyphasés.* Note [1] de M. ÉMILE PILLET, présentée par M. Joseph Pérès.

La mise en équations des valeurs instantanées des intensités et des tensions, dans une machine électrique tournante non saturée, conduit à un système d'équations différentielles linéaires dont certains coefficients sont des fonctions sinusoïdales du temps. En appliquant à ce système la transformation de Laplace on obtient un système que l'on peut résoudre, dans le cas des machines polyphasées, en combinant linéairement les équations transformées. On est ainsi conduit, systématiquement, à une généralisation des coordonnées symétriques de Fortescue.

Appliquée à l'étude des régimes transitoires, et plus particulièrement des courants de court-circuit, la méthode conduit aux résultats suivants :

1° Dans l'analyse des phénomènes statoriques, le nombre des phases du rotor polyphasé est indifférent. C'est le résultat déjà obtenu d'une autre manière par G. Kron (*The application of tensors to the analysis of rotating electrical machinery*, Schenectady, 1938). On peut donc toujours remplacer une cage d'écureuil complète par un rotor di- ou triphasé équivalent.

2° La mise en équations d'un alternateur triphasé amorti conduit à :

(I)

$$(1)\qquad u_a = \mathrm{R}_a i_a + \mathrm{L}_a \frac{di_a}{dt} + \mathrm{M}_{ab}\frac{d}{dt}(i_b + i_c) + \mu\frac{d}{dt}[i_e\cos(\omega_r t + \varphi_0)] + \mathfrak{M}\frac{d}{dt}\left[i_1\cos(\omega_r t + \varphi_0) + i_2\cos\left(\omega_r t + \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}\right) + i_3\cos\left(\omega_r t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

(2) et (3) équations analogues pour u_b et u_c,

$$(4)\qquad u_e = \mu\frac{d}{dt}\left[i_a\cos(\omega_r t + \varphi_0) + i_b\cos\left(\omega_r t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c\cos\left(\omega_r t + \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}\right)\right] + \mathrm{R}_e i_e + \mathrm{L}_e\frac{di_e}{dt} + \mu_{e1}\frac{di_1}{dt} + \mu_{e2}\frac{di_2}{dt} + \mu_{e3}\frac{di_3}{dt},$$

(5), (6) et (7) équations analogues pour les circuits 1, 2, et 3.

---

[1] Séance du 13 août 1945.

La transformation de Laplace donne le système (II)

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{ll}(1) & y_a=(\mathrm{R}_a+p\mathrm{L}_a)x_a+p\mathrm{M}_{ab}(x_b+x_c)+\frac{1}{2}p\mu(\varepsilon x_{c_-}+\varepsilon^{-1}x_{c_+}) \\ & \qquad +\frac{1}{2}p\mathcal{M}(\varepsilon x_{1_-}+\varepsilon^{-1}x_{1_+}+\varepsilon a x_{2_-}+\varepsilon^{-1}a^2x_{2_+}+\varepsilon a^2 x_{3_-}+\varepsilon^{-1}a x_{3_+}), \\ (2)\ (3) & \text{équations analogues en } y_b \text{ et } y_c, \\ (4) & y_e=\frac{1}{2}p\mu[\varepsilon x_{a_-}+\varepsilon^{-1}x_{a_+}+\ldots]+(\mathrm{R}_e+p\mathrm{L}_e)x_e+p(\mu_{e1}x_1+\mu_{e2}x_2+\mu_{e3}x_3), \\ (5),\ (6)\ \text{et}\ (7) & \text{équations analogues en } y_1,\ y_2 \text{ et } y_3,\end{array}\right.$$

où $a=e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $\varepsilon=e^{j\varphi_0}$, $x_{k_+}=x_{k_{(p+j\omega_r)}}$ et $x_{k_-}=x_{k_{(p-j\omega_r)}}$

et où les constantes initiales sont groupées dans les termes y_k.

Posons $y_a+y_b+y_c=\mathrm{Y}_0$, $\quad y_a+ay_b+a^2y_c=\mathrm{Y}_d$, $\quad\ldots;$
$y_1+y_2+y_3=\mathcal{Y}_0$, $\quad\ldots.\quad x_a+x_b+x_c=\mathrm{X}_0$, $\quad\ldots,$

les combinaisons linéaires classiques donnent le système (III).

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{ll}(1) & \mathrm{Y}_0=(\mathrm{R}_a+p\lambda_a)\mathrm{X}_0, \\ (2) & \mathcal{Y}_0=(\mathrm{R}_1+p\lambda_1)\mathcal{X}_0, \\ (3) & \mathrm{Y}_{d_+}=\big(\mathrm{R}_a+(p+j\omega_r)\mathcal{L}_a\big)\mathrm{X}_{d_+}+\frac{3}{2}(p+j\omega_r)\mu\,\varepsilon x_e+\frac{3}{2}(p+j\omega_r)\mathcal{M}\,\varepsilon\,\mathcal{X}_d, \\ (4) & \mathrm{Y}_{i_-}=\big(\mathrm{R}_a+(p-j\omega_r)\mathcal{L}_a\big)\mathrm{X}_{i_-}+\frac{3}{2}(p-j\omega_r)\mu\varepsilon^{-1}x_e+\frac{3}{2}(p-j\omega_r)\mathcal{M}\varepsilon^{-1}\mathcal{X}_i, \\ (5) & y_e=\frac{1}{2}p\mu[\varepsilon^{-1}\mathrm{X}_{d_+}+\varepsilon\mathrm{X}_{i_-}]+(\mathrm{R}_e+p\mathrm{L}_e)x_e+\frac{1}{2}p\mu_{e1}(\mathcal{X}_d+\mathcal{X}_i), \\ (6) & \mathcal{Y}_d=\frac{3}{2}p\mathcal{M}\varepsilon^{-1}\mathrm{X}_{d_+}+\frac{3}{2}p\mu_{e1}x_e+(\mathrm{R}_1+p\mathcal{L}_1)\mathcal{X}_d, \\ (7) & \mathcal{Y}_i=\frac{3}{2}p\mathcal{M}\,\varepsilon\,\mathrm{X}_{i_-}+\frac{3}{2}p\mu_{e1}x_e+(\mathrm{R}_1+p\mathcal{L}_1)\mathcal{X}_i.\end{array}\right.$$

Les deux premières équations donnent immédiatement les composantes homopolaires; les cinq autres conduisent à un déterminant du 5ᵉ ordre.

3° *Cas particuliers importants.* — *a.* Machine d'induction à simple rotor; il reste deux systèmes séparés (IV_d) et (IV_i)

$$(\mathrm{IV}_d)\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{R}_a+p\mathcal{L}_a)\mathrm{X}_d+\frac{3}{2}p\mathcal{M}\varepsilon\,\mathcal{X}_{d_-}=\mathrm{Y}_d, \\ \frac{3}{2}(p-j\omega_r)\mathcal{M}\varepsilon^{-1}\mathrm{X}_d+[\mathrm{R}_1+(p-j\omega_r)\mathcal{L}_1]\mathcal{X}_{d_-}=\mathcal{Y}_{d_-},\end{array}\right.$$

(IV_i) analogue, avec changement du signe de $j\omega_r$ et des exposants de ε.

Les pôles de X_d, autres que ceux provenant des y, sont les racines de l'équation

$$(\mathrm{R}_a+p\mathcal{L}_a)[\mathrm{R}_1+(p-j\omega_r)\mathcal{L}_1]-\frac{9}{4}p(p-j\omega_r)\mathcal{M}^2=0,$$

c'est-à-dire, en première approximation,

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{R_a}{\sigma\mathcal{L}_a} + \Delta p, \\ p_2 &= -\frac{R_1}{\sigma\mathcal{L}_1} - \Delta p + j\omega_r, \end{aligned}\right\} \text{avec } \Delta p \simeq j\omega_r \frac{(1-\sigma)R_a R_1}{\sigma^2\omega_r^2\mathcal{L}_a\mathcal{L}_1}.$$

b. Alternateur non amorti; il reste un système du 3ᵉ ordre.

Les pôles de x_e, autres que ceux provenant des y, sont les racines du déterminant des coefficients, soit, en première approximation,

$$p_1 = -\frac{R_e}{\sigma L_e}, \qquad \left.\begin{matrix} p_2 \\ p_3 \end{matrix}\right\} = -\frac{(1+\sigma)R_a}{2\sigma\mathcal{L}_a} \pm j\omega_r.$$

4° Appliquées à l'étude des courants de court-circuit les formules précédentes conduisent à apporter quelques corrections aux résultats classiques (tels qu'ils sont développés par J. Fallou, *Électrotechnique générale*, tome II).

Pour les machines d'induction, la correction Δp porte sur les pulsations; elle est maximum pour les petits moteurs ayant de faibles constantes de temps; elle peut alors atteindre 10 % de la pulsation de rotation ω_r.

Pour les alternateurs, la correction porte sur les constantes de temps; il faut remplacer $R_a/\sigma\mathcal{L}_a$ par $(1+\sigma)(\mathcal{R}_a/2\sigma\mathcal{L}_a)$. De plus, il apparaît des termes nouveaux de pulsation $2\omega_r$.

MAGNÉTISME. — *Propriétés ferromagnétiques du composé défini* CrTe. Note [1] de M. **Charles Guillaud** et Mme **Suzanne Barbezat**, présentée par M. Aimé Cotton.

Les alliages ont été préparés en partant de poudres très fines de Cr et de Te (tamis 350) bien mélangées et placées dans un creuset d'alumine contenu lui-même dans un four dans lequel, après y avoir fait le vide, on pouvait introduire de l'argon très pur. La préparation a été faite sous pression d'argon et en chauffant à 1200° C. pendant une heure. Nous avons obtenu ainsi des alliages homogènes et bien cristallisés. L'homogénéité a été vérifiée à l'aide des mesures magnétiques. La composition de l'alliage se déduit de la masse des constituants et de la masse de l'alliage obtenu, la perte en Cr étant négligeable. Ces synthèses ont été confirmées par des analyses chimiques.

Afin de bien connaître la composition de l'alliage donnant le maximum de moment magnétique, des alliages de titres différents ont été préparés. L'étude magnétique de tous ces alliages a été faite. Il a donc été possible de tracer la courbe donnant le moment magnétique en fonction du titre. Cette courbe montre que le moment est maximum pour le composé défini Cr Te.

---

[1] Séance du 4 février 1946.

Propriétés magnétiques. — Les figures ci-contre traduisent les propriétés magnétiques de l'alliage dont la composition (70,9 % de Te) était la plus proche de celle du composé Cr Te (71,04 % de Te). Les propriétés magnétiques sont qualitativement les mêmes pour tous les alliages étudiés, seuls les moments diffèrent.

La courbe (*fig.* 1) montre qu'aux basses températures, l'aimantation spéci-

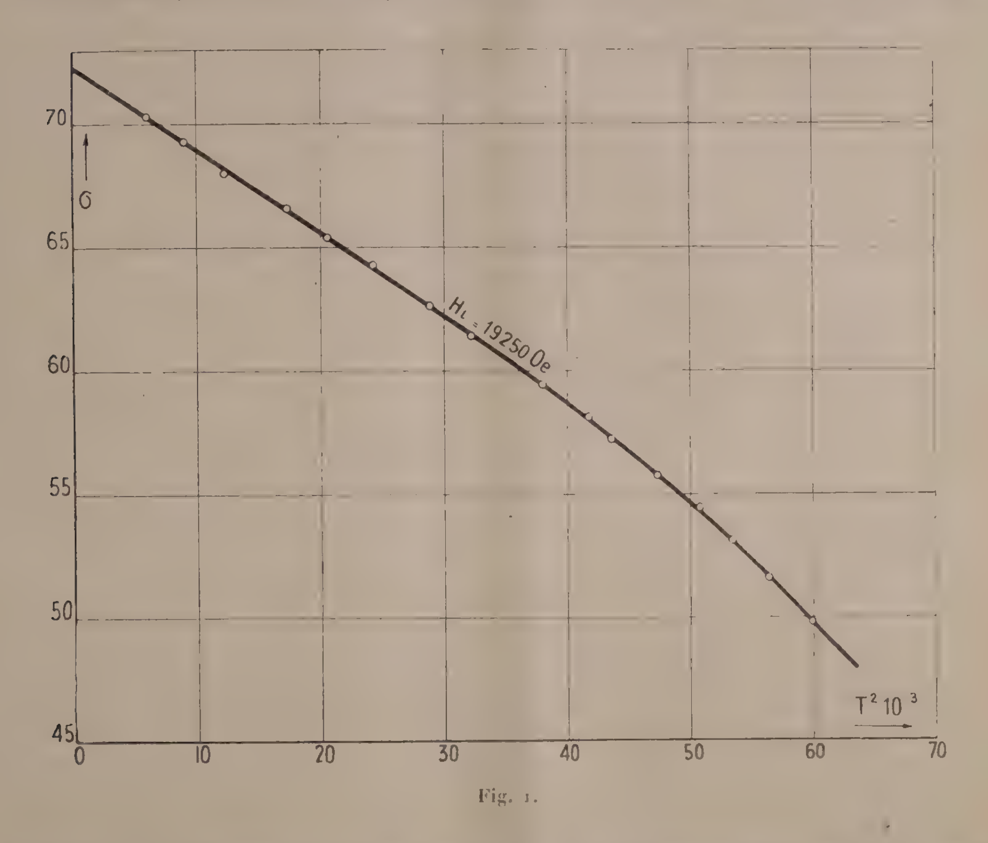


Fig. 1.

fique varie linéairement en fonction de T^2, la loi d'approche $\sigma_1 = \sigma_0(1 - AT^2)$ est donc valable.

Les courbes (*fig.* 2) donnent l'aimantation spécifique en fonction de H_i (H_i champ intérieur). A la température ordinaire la loi d'approche $\sigma_H = \sigma_0[1 - (a/H)]$ n'est pas vérifiée, elle ne devient valable qu'à partir de 90° K. La valeur de a est indépendante de la température et de l'échantillon. Nous trouvons pour l'aimantation spécifique absolue de cet alliage

$$\sigma_{\infty, 0^\circ K.} = 74,43.$$

De la courbe donnant l'aimantation en fonction du titre, nous déduisons pour le composé défini CrTe, la valeur suivante :

$$\sigma_{\infty, 0^\circ K} = 74,57, \qquad \text{d'où} \quad \sigma_{at} = 13394.$$

Le moment de l'atome de chrome entrant dans la molécule est donc

$n = 11,90$ μW. (magnétons de Weiss) ou 2,39 μW. (magnétons de Bohr).

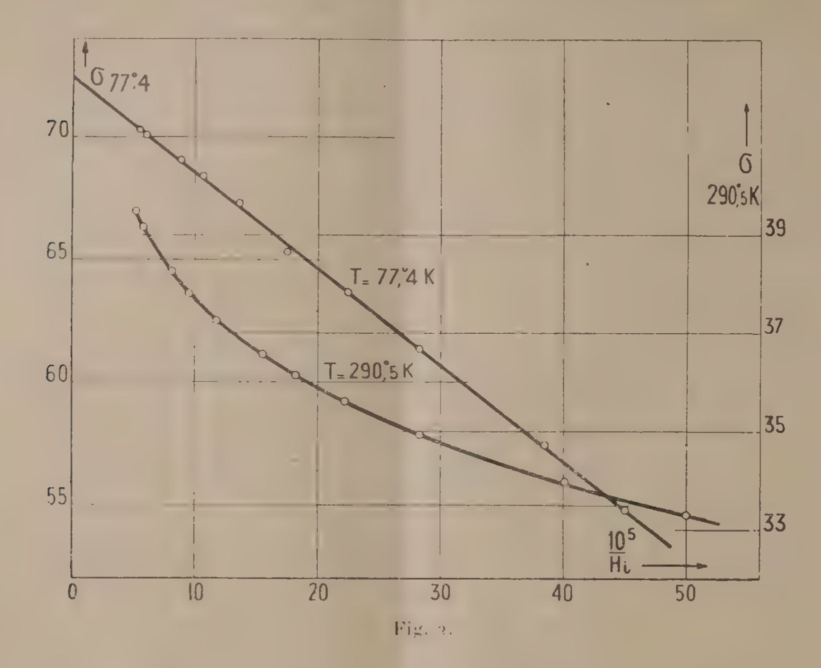


Fig. 2.

Le point de Curie identique pour tous les alliages est

$$\theta_f = 66°C.$$

Étude Röntgenographique. — Oftedal ([2]) a montré que CrTe avait une structure hexagonale du type NiAs avec $a = 3,98$ Å, $c = 6,21$ Å, $c/a = 1,56$. Nous avons repris cette étude au Laboratoire de rayons X du C.N.R.S. en collaboration avec J.-J. Trillat; les échantillons ont été examinés par la méthode de Debye-Scherrer avec le rayonnement K_α du cuivre. Les diagrammes obtenus confirment les résultats d'Oftedal et fournissent les mêmes paramètres; de plus ils permettent de montrer que la phase ferromagnétique débute au composé CrTe et qu'il n'existe pas de solution solide de Cr dans CrTe, mais seulement le mélange Cr + CrTe. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par l'étude magnétique.

EFFET RAMAN. — *Spectres de vibrations des sulfates orthorhombiques naturels : étude théorique.* Note de Mlle **Lucienne Couture**, présentée par M. Aimé Cotton.

Les sulfates orthorhombiques SO_4M (M = Sr, Ba, Pb) ont un seul plan de symétrie vrai σ_Y (OY étant la direction perpendiculaire à ce plan, on a

([2]) *Zeits. phys. Chem.*, **128**, 1927, p. 135.

OX : n_g, OY : n_m, OZ : n_p). Leur maille contient quatre ions M^{++} et quatre ions SO_4^{--} de symétrie propre C_s.

Étude des vibrations internes. — L'ion SO_4 libre, de symétrie T_d, possède quatre fréquences de vibration : $\nu_1(\sim 980\ \text{cm}^{-1})$, vibration simple totalement symétrique; $\nu_2(\sim 458\ \text{cm}^{-1})$, vibration doublement dégénérée de déformation; $\nu_3(\sim 615\ \text{cm}^{-1})$, vibration triplement dégénérée de déformation; $\nu_4(\sim 1105\ \text{cm}^{-1})$, vibration triplement dégénérée de valence. Dans le cristal la symétrie de l'ion est plus basse, les vibrations dégénérées se séparent en un nombre de vibrations simples égal au degré de la dégénérescence; chaque vibration simple de l'ion donne par couplage quatre vibrations d'ensemble du cristal. Le tableau suivant donne les types de ces vibrations avec leur origine :

1.	2.	3.	
ν_1	$s(\sigma_Y)$	A_{1g}, B_{2g}, B_{1u}, B_{3u}	Ensemble E_1
ν_2	$a(\sigma_Y)$	B_{1g}, B_{3g}, A_{1u}, B_{2u}	Ensemble E_2
	$s(\sigma_Y)$	A_{1g}, B_{2g}, B_{1u}, B_{3u}	

1.	2.	3.	
ν_3 ou ν_4....	$a(\sigma_Y)$	B_{1g}, B_{3g}, A_{1u}, B_{2u}	Ensemble E_3 ou E_4
	$s(\sigma_Y)$	A_{1g}, B_{2g}, B_{1u}, B_{3u}	
	$s(\sigma_Y)$	A_{1g}, B_{2g}, B_{1u}, B_{3u}	

1. Vibration de l'ion libre. — 2. Symétrie de la vibration simple de l'ion dans le cristal. — 3. Types des vibrations de la maille.

Les vibrations de types A_{1g}, B_{1g}, B_{2g}, B_{3g} sont actives en effet Raman; celles de types B_{1u}, B_{2u}, B_{3u} actives en infrarouge. Toutes les fréquences de vibration de l'ensemble E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) doivent être voisines de la fréquence ν_i de l'ion libre. Les ensembles E_i contiennent 2, 4 ou 6 vibrations actives en effet Raman selon que la vibration correspondante de l'ion libre est simple, doublement ou triplement dégénérée.

Les considérations de symétrie donnent donc le nombre et les types des vibrations des ensembles E_i; nous allons montrer qu'on peut, de plus, prévoir les intensités relatives de toutes les raies de Raman comprises dans un même ensemble, dans l'hypothèse où le champ cristallin entourant chaque ion SO_4, suffisant pour faire cesser la dégénérescence, trouble peu les vibrations de l'ion et les variations de la polarisabilité au cours de ces vibrations. Les écarts avec l'expérience renseigneront de façon précise sur la perturbation apportée à l'ion par son entourage.

Une étude, faite en collaboration avec J.-P. Mathieu, à paraître au *Journal de Physique*, a montré que, dans l'effet Raman produit par une vibration dégénérée, l'on doit considérer un nombre de tenseurs de polarisabilité dérivés

égal au nombre des coordonnées normales, c'est-à-dire au degré de la dégénérescence. (Ces tenseurs ont entre eux des relations qui conduisent aux règles de sélection habituelles.) Il en résulte qu'on peut attribuer un tenseur à chacune des vibrations simples de l'ion qui, dans le cristal, proviennent d'une même vibration dégénérée de l'ion libre. De ces tenseurs l'on déduit les tenseurs relatifs aux vibrations de l'ensemble de la maille par la méthode employée par J. Cabannes et R. Aynard ([1]). Comme les tenseurs dont nous partons ont entre eux des relations, ceux auxquels nous arrivons en ont aussi; ils nous servent à calculer les valeurs relatives des intensités des raies de Raman correspondant aux vibrations d'un même ensemble.

Les valeurs relatives des intensités des raies de l'ensemble E_2 s'expriment en fonction d'un angle α qui suffit à définir la position de l'ion SO_4 dans le cristal, paramètre connu par l'étude du cristal aux rayons X. Les valeurs relatives des intensités des six raies de chacun des ensembles E_3 et E_4 s'expriment en fonction de α et d'un angle θ. Cet angle détermine la façon dont se fait la cessation de dégénérescence entre les deux vibrations simples $s(\sigma_y)$ de l'ion provenant d'une vibration triplement dégénérée. Comme ces deux vibrations sont de même type, θ n'est pas fixé par les conditions de symétrie.

(Les résultats expérimentaux pourront fixer cet angle θ et permettre de préciser la façon dont se fait la cessation de dégénérescence). Plus particulièrement, on trouve les résultats suivants : dans l'ensemble E_1, la raie de type B_{2g} a une intensité théorique nulle; dans l'ensemble E_2, la raie de type B_{3g}, et dans les ensembles E_3 et E_4, les raies de type B_{1g}, ont des intensités relatives égales à $\sin^2\alpha$. L'angle α étant de l'ordre de $10°$, ces intensités sont très petites.

CHIMIE MINÉRALE. — *Étude calorimétrique comparée de l'oxydation des hydroxydes nickeleux, cobalteux, manganeux et ferreux.* Note ([1]) de M. **Jean Besson**, présentée par M. Louis Hackspill.

La méthode calorimétrique que nous utilisons, préconisée d'abord par Dutoit et Grobet ([2]), puis Mondain-Monval et Paris ([3]), a été appliquée récemment par Rivenq ([4]) à l'étude de quelques persels. Une des substances réagissantes, introduite dans un vase Dewar, est agitée mécaniquement; à intervalles réguliers, on y ajoute une quantité déterminée de l'autre réactif. On note en même temps l'élévation de température ΔT produite par la chaleur de réaction et l'on trace la courbe donnant ΔT en fonction du volume de réactif

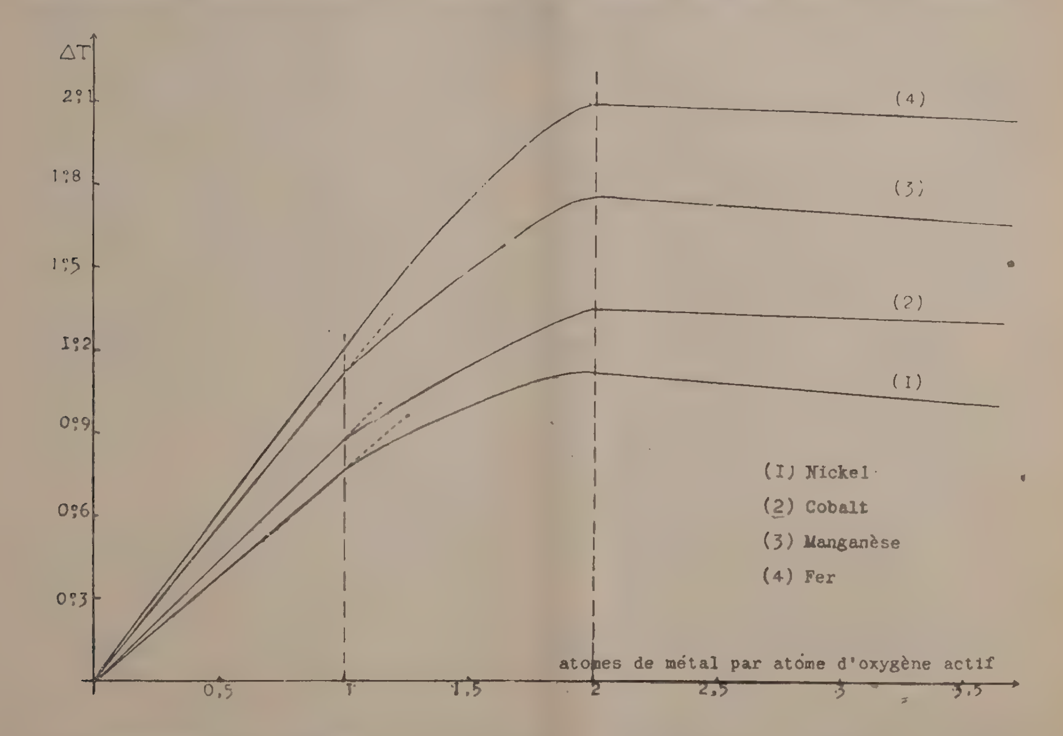
([1]) *Journal de Physique*, 3, 1942, p. 137.

([1]) Séance du 4 février 1946.
([2]) *Jour. Chim. Phys.*, 19, 1921, p. 324.
([3]) *Bull. Soc. Chim.*, 5, 1938, p. 1641.
([4]) *Bull. Soc. Chim.*, 12, 1945, p. 283.

ajouté. Une discontinuité ou un maximum de cette courbe indiquent la fin d'une réaction; on en déduit la composition des produits de cette réaction. Voici les résultats obtenus dans le cas étudié :

Par addition d'un oxydant quelconque à la suspension alcaline d'un des hydroxydes considérés, on n'obtient qu'un dégagement calorifique régulier et indéfini, se traduisant par une courbe continue.

Par contre l'addition à température ordinaire du sel métallique à une solution alcaline de persulfate de sodium conduit à des courbes présentant des singularités intéressantes. La figure les donne pour le nickel, le cobalt, le



manganèse et le fer. Elles ont été rendues comparables en portant en abscisses le rapport : atomes de métal ajoutés par atome d'oxygène actif, et en utilisant des quantités égales d'oxydant (20^{cm^3} de persulfate 0,05 N) et de soude (100^{cm^3} 0,7 N).

Pour $Ni(OH)_2$, $Co(OH)_2$ et $Mn(OH)_2$ on y distingue une première partie parfaitement rectiligne qui se termine exactement pour le rapport

$$\frac{\text{métal}}{\text{oxygène}} = 1.$$

Puis la courbe s'incurve et ΔT continue de croître jusqu'à un maximum correspondant à un rapport

$$\frac{\text{métal}}{\text{oxygène}} = 2.$$

Enfin elle décroît lentement et régulièrement sans autre singularité apparente.

Pour $Fe(OH)_2$, au contraire, on ne distingue nettement qu'un maximum pour $Fe/O = 2$.

Or l'oxydation de l'hydroxyde manganeux, étudiée par d'autres procédés, est bien connue. On sait qu'en présence d'un excès d'oxydant, cette oxydation va jusqu'au bioxyde MnO_2, bioxyde à fonction acide qui peut ensuite réagir sur un excès d'hydroxyde manganeux pour donner le sesquioxyde $Mn_2O_3 = MnO_2, MnO$, oxyde à la fois salin et basique. C'est l'explication des trois parties observées sur la courbe expérimentale. Le bioxyde peut d'ailleurs réagir sur une nouvelle molécule de protoxyde en donnant l'oxyde salin $Mn_3O_4 = MnO_2, 2MnO$. Mais la formation de ce corps n'apparaît pas sur notre courbe.

L'analogie parfaite des courbes relatives au manganèse, au nickel et au cobalt nous autorise donc à envisager de façon identique l'oxydation de ces deux derniers : par addition d'un sel nickeleux ou cobalteux à une solution alcaline de persulfate, on arrive d'abord jusqu'aux bioxydes NiO_2 ou CoO_2, bioxydes instables à fonction acide réagissant immédiatement sur un excès de protoxyde en donnant les sesquioxydes Ni_2O_3 ou Co_2O_3, qui apparaissent ainsi comme des oxydes salins. On sait d'ailleurs que Co_2O_3, comme Mn_2O_3, est aussi basique. Enfin rappelons que nous avons mis en évidence par une méthode différente ([3]) la formation par voie humide de Ni_3O_4, autre oxyde salin analogue à Mn_3O_4 et Co_3O_4. Pour le fer au contraire on ne peut caractériser que le degré d'oxydation correspondant au sesquioxyde.

En résumé les hydroxydes manganeux, nickeleux et cobalteux se comportent de façon absolument identique au cours de leur oxydation par le persulfate de sodium. Pour l'hydroxyde ferreux on ne peut conclure avec certitude.

CHIMIE THÉORIQUE. — *Une méthode de calcul de l'influence des substituants sur la répartition des charges électroniques d'une molécule aromatique. Application à certains carbures cancérigènes.* Note ([1]) de Mme **Alberte Pullman**.

L'introduction d'un substituant ou d'un hétéroatome (que nous désignerons désormais par le terme général de *substituant*) dans un hydrocarbure aromatique a pour effet de modifier la réactivité de la molécule (elle détermine par exemple la place d'une seconde substitution éventuelle). Wheland et Pauling ([2]) ont étudié cette question par la méthode des orbites moléculaires qui conduit, dans le cas des grosses molécules, à des calculs pénibles et à des résultats peu satisfaisants. Nous avons cherché

([3]) *Comptes rendus*, 219, 1944, p. 130.

([1]) Séance du 22 octobre 1945.

([2]) *Journ. of Am. Chem. Soc.*, 57, 1935, p. 2086.

à introduire cette influence dans le cadre de la méthode du *diagramme moléculaire* [3] (diagramme des charges électroniques) qui est relativement simple et donne de bons résultats dans le cas des hydrocarbures non substitués.

Le problème qui se pose est de savoir quels points de la molécule sont particulièrement affectés par la présence du substituant et de déterminer quantitativement la perturbation. Nous avons spécialement étudié le cas du radical méthyle (substitué à un hydrogène de l'hydrocarbure) et celui de l'azote (à la place d'un carbone du cycle), en vue de répondre aux deux questions de ce problème. Le principe de la méthode que nous indiquons est très probablement applicable à d'autres substituants.

En accord avec Wheland et Pauling [2] nous considérons que CH_3 repousse les électrons, alors que N au contraire les attire. Nous décomposons l'effet en deux : l'effet sur la résonance, et l'effet inductif du substituant en son voisinage. Pour introduire le premier effet, nous calculons les diagrammes électroniques pour chaque degré d'excitation de la même façon que dans la méthode de Swartholm [4] avec la modification suivante : pour une liaison ineffective donnée aboutissant en un sommet substitué, nous admettons que les deux électrons sont rejetés à l'autre sommet si le substituant est répulsif (CH_3); au contraire qu'ils sont rejetés au sommet substitué si le substituant est attractif (N). On calcule alors le diagramme des charges à l'aide des nombres obtenus qui leur sont proportionnels. En ce qui concerne l'effet inductif, nous admettons qu'un substituant attractif diminue de 50 % la charge du sommet adjacent et de 10 % celle du sommet suivant. L'effet est inverse pour un substituant répulsif. Étant donnée la grande dimension des zones des liaisons par rapport à celles des sommets, il est licite de supposer que la charge des liaisons n'est pas modifiée de façon sensible.

Nous donnons comme exemple les diagrammes obtenus pour le toluène (comparé au benzène) et pour l'acridine (comparée à l'anthracène) [5].

CH_3 N

On comprend ainsi pourquoi les points actifs du toluène sont *ortho* et *para*; on comprend également que l'acridine soit un corps particulièrement stable.

---

[3] *J. de Chim. Phys.* (sous presse).

[4] *Arkiv for Kem., Min., Geol.*, mai 1941.

[5] Pour les notations, voir Daudel et Pullmann, *Comptes rendus*, 221, 1945, p. 201.

Nous avons appliqué cette méthode à certaines benzacridines; le Tableau ci-dessous montre que les résultats semblent confirmer l'hypothèse faite par nous précédemment ([6]) quant à la nécessité d'une région mésophénanthrénique fortement chargée pour l'apparition du pouvoir cancérigène dans cette classe de corps.

	7-8 benzacridines.		5-6 benzacridines.	
	Charge Rmp unités arbitraires.	Activité.	Charge Rmp unités arbitraires.	Activité.
Simple............	172	inactive	162	inactive
Monométhylée	207	active	187	»
Diméthylée........	222	trés active	174	»

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur les hydrazides de l'acide nicotique : le bis-nicotamide (dihydrazide nicotique symétrique).* Note de M. **Jean-Albert Gautier**, présentée par M. Marcel Delépine.

La publication de divers Mémoires étrangers ([1]) récemment parvenus à la connaissance des lecteurs français m'incite à exposer les résultats partiels que j'ai obtenus au cours de recherches sur les hydrazides de l'acide nicotique. La présente Note a particulièrement pour objet la description du dihydrazide symétrique (C_5H_4N) CONH-NHCO (C_5H_4N) non encore préparé, à ma connaissance. Ce composé m'a paru présenter de l'intérêt pour des raisons d'ordre biologique, liées à la notion nouvelle d'*antimétabolite* ([2]) et d'*antivitamine*. La découverte, par Meunier et Mentzer ([3]), de l'antivitamine K amena ces auteurs à envisager comme doués d'activité *anti* les corps que l'on obtient par doublement des molécules à action vitaminique ([4]). Il m'a semblé aisé de contrôler cette hypothèse dans le cas du facteur PP, dont la constitution chimique est particulièrement simple (amide nicotique); le doublement de sa molécule autour de l'unique groupement fonctionnel qu'elle renferme $(CONH_2)$, amenait à envisager dans ce cas, comme antivitamine spécifique, le dihydrazide symétrique dont la constitution est donnée plus haut, et que l'on peut nommer *bis-nicotamide*.

L'expérience m'a montré que ce composé pouvait être obtenu facilement au moyen de réactions classiques. Bien que cette Note soit consacrée à la relation de résultats purement chimiques, j'indiquerai d'ores et déjà que les essais

([6]) *Comptes rendus*, 221, 1945, p. 140.

([1]) En particulier, Fox et Field, *J. Biol. Chem.*, 147, 1943, p. 651.

([2]) Knight, *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 27, 1945, p. 276.

([3]) *Comptes rendus*, 215, 1942, p. 259.

([4]) *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 25, 1943, p. 84.

biologiques auxquels a été soumis le bisnicotamide tendent à lui dénier toute activité antivitaminique ([5]).

Le bis-nicotamide se forme régulièrement au cours de l'oxydation du monohydrazide nicotique, (C_5H_4N)—CONH—NH_2. Ce dernier a été obtenu antérieurement par Curtius et Mohr ([6]) au moyen de l'hydrate d'hydrazine et du nicotate d'éthyle; Fox et Field (*loc. cit.*) ont préféré le préparer par une réaction comparable à celle qui donne naissance au benzhydrazide ([7]), à partir de l'amide nicotique :

$$(C_5H_4N)CONH_2 + NH_2-NH_2 = (C_5H_4N)CONH-NH_2 + NH_3.$$

Simultanément, j'avais de mon côté utilisé, pour accéder au monohydrazide, l'une et l'autre voie et donné la préférence à la première; elle est en effet expéditive et livre d'emblée un produit pur avec le rendement théorique; quand, par contre, on chauffe, comme Fox et Field, l'amide nicotique avec l'hydrazine en solution aqueuse, la réaction, pour peu qu'on opère sur des quantités de quelque importance, est lente et incomplète, ce qui pose le problème délicat de la séparation de l'hydrazide et de l'amide en excès (mêmes caractères de solubilité).

J'ai obtenu le monohydrazide sous forme de cristaux incolores très solubles dans l'eau, F 161°,5 (bloc); Curtius et Mohr (*loc. cit.*), de même que Fox et Field, indiquent F 158-159°. Sa fonction hydrazide lui confère des propriétés réductrices accentuées; sous l'influence de l'iode en milieu neutre, il libère la moitié de l'azote de la fonction hydrazide en se transformant en dihydrazide

$$2(C_5H_4N)CONH-NH_2 + 2I_2 = [(C_5H_4N)CONH]_2 + 4IH + N_2.$$

En milieu alcalin, l'iode et le brome le décomposent plus profondément avec élimination à l'état gazeux de la totalité de l'azote hydrazidé (une molécule N_2 pour une d'hydrazide).

La transformation du monohydrazide en dihydrazide symétrique est réalisable par les procédés appliqués aux hydrazides de l'acide benzoïque ([7]), ([8]) : oxydation en milieu alcoolique par l'iode ou l'oxyde jaune de mercure. Le second moyen est ici préférable, l'action de l'iode pouvant conduire à précipiter le dihydrazide formé sous forme d'un periodure dont il est difficile de le régénérer.

Le monohydrazide en solution alcoolique est agité quelques heures avec la quantité théorique d'oxyde jaune finement pulvérisé; on observe un dégagement d'azote et la réduction de l'oxyde; le bis-nicotamide, peu soluble, précipite avec le mercure. On

---

([5]) Ces essais, effectués en commun avec M. P. Cordier, seront exposés en détail dans un autre Recueil.

([6]) *Ber. d. chem. Gesellsch.*, 31, 1898, p. 2493.

([7]) Curtius et Struve, *J. prakt. Chem.*, 50, 1894, p. 296.

([8]) Curtius, *J. prakt. Chem.*, 52, 1895, p. 219.

l'extrait au moyen de l'acide chlorhydrique du précipité mixte essoré et on l'isole en le précipitant de nouveau par exacte neutralisation; les eaux mères alcooliques, distillées, en abandonnent une nouvelle quantité; Rt 70 %.

Le bis-nicotamide forme une poudre blanche, très peu soluble dans l'eau et les solvants organiques, F 226°. C'est un composé stable, résistant à l'action décomposante des acides et des alcalis; peu réducteur en milieu neutre, il est par contre oxydable en milieu alcalin au niveau de sa fonction hydrazide : sous l'influence de l'hypobromite et de l'hypoiodite, il perd, dès la température ordinaire, la totalité de son azote hydrazidé sous forme élémentaire, avec transformation au moins partielle en acide nicotique. Sa molécule présente la particularité de renfermer à la fois deux atomes d'azote à propriétés acides (ceux de la fonction hydrazide) et deux à propriétés basiques (azotes intranucléaires); de sorte qu'il se comporte en définitive comme amphotère : il forme, grâce aux azotes fonctionnels, des sels alcalins, jaunes et solubles, un sel d'argent, jaune et insoluble, les uns et les autres peu stables, difficiles à isoler purs; d'autre part, il donne, par ses azotes intracycliques, des sels bien définis, cristallisés, solubles dans l'eau et l'alcool : dichlorhydrate, F 235° (déc.), diiodhydrate, F 248° (déc.), ainsi qu'un periodure complexe, de composition $(C_{12}H_{10}N_4O_2)$, 2IH, I_3, poudre brune insoluble, F vers 200°, cédant facilement en milieu aqueux ses trois atomes d'iode d'addition. Le bis-nicotamide forme aussi un iodométhylate, mais qui, instable, se résinifie en cours de purification.

En résumé, le bis-nicotamide présente les caractères des dihydrazides aromatiques tout en s'écartant de ces derniers par ses propriétés amphotères.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le mécanisme de la réaction de β-hydroxycarbonylation*. Note [1] de M. **Henry Gault**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'étude méthodique d'un grand nombre de réactions d'*aldolisation* et surtout de *cétolisation* [2], génératrices de β-hydroxyaldéhydes et, respectivement, de β-hydroxycétones, ensemble de réactions auquel j'ai proposé de donner le nom général de *β-hydroxycarbonylation*, en y incorporant les réactions d'*acidolisation*, génératrices de β-hydroxyacides, m'a conduit à suggérer une explication relative au mécanisme de cette réaction, lorsqu'elle s'effectue en milieu aqueux alcalin.

J'ai admis [3] que, dans ce cas, la condensation β-hydroxycarbonylique s'établit entre deux molécules de composés carbonylés, soit identiques, soit différentes, dont l'une a pris la forme d'*hydrate* et l'autre la forme d'*énolate alcalin*.

L'un des hydroxyles de la forme hydrate, *molécule associable*, se porte à l'un des atomes de carbone de la double liaison de la moléeule énol, *molécule associante*, le reste hydroxyalcoolique libéré se portant à l'autre atome de carbone

---

(1) Séance du 28 janvier 1946.

(2) H. Gault et R. Durand, *Comptes rendus*, 216, 1943, p. 848; H. Gault et T. Wendling, *Bull. Soc. chim.*, 5e série, 3, 1936, p. 567; H. Gault et L. Erichomovitch, *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 294; H. Gault et J. Suprin, *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 185.

(3) H. Gault, *Exposé de titres*, 1941.

de cette même double liaison

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!>\!CH-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-R_3 \quad \begin{matrix} R_4 \\ R_5 \end{matrix}\!>\!C=O \qquad \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!>\!C=\overset{OH}{\overset{|}{C}}-R_3 \quad \begin{matrix} R_4 \\ R_5 \end{matrix}\!>\!C\begin{matrix} -OH \\ \diagdown OH \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!>\!C-\overset{HO\;\;HO}{\overset{\vee}{C}}-R_3 \quad \begin{matrix} R_4 \\ R_5 \end{matrix}\!>\!C-OH \rightarrow \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!>\!C-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-R_3 \quad \begin{matrix} R_4 \\ R_5 \end{matrix}\!>\!C-OH$$

où R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5 peuvent être soit des atomes d'hydrogène, soit des radicaux identiques ou différents.

On peut se demander si cette hypothèse n'est pas transposable à la condensation β-hydroxycarbonylique d'autres molécules que celles des composés carbonylés proprement dits entre eux, par exemple à la condensation, en milieu aqueux alcalin, des *phénols* avec les aldéhydes, génératrices d'hydroxyalcoylphénols et, entre autres, à la condensation du phénol lui-même avec le formaldéhyde qui engendre la saligénine comme produit principal de la réaction.

Si l'on envisage que le phénol est la forme énolique [cyclohexatriénol (I)] de la cyclohexadiénone (II), la formation de la saligénine peut s'expliquer par un mécanisme identique à celui que je viens d'exposer, en admettant que l'un des hydroxyles de l'hydrate de formaldéhyde se porte à l'un des atomes de carbone de la double liaison énolique, le reste hydroxyméthylique se portant à l'autre atome de carbone de cette même double liaison :

(II) ⇌ (I) + HO–CH₂–OH → [HO HO] C, CH–CH₂OH → C=O, CH–CH₂OH → C–OH, C–CH₂OH

On sait toutefois que la condensation phénol-formaldéhyde donne simultanément naissance à de petites quantités de *p*-hydroxyméthylphénol, et je suis ainsi conduit à admettre que le phénol est, en réalité, un mélange de deux formes tautomériques se rattachant l'une [cyclohexatriénol (I)] à la cyclohexadiénone (II), l'autre [cyclohexadiénol ponté (III)] à la cyclohexadiénone (IV), formes qui présentent toutes deux le même pouvoir additif au regard des deux groupements constituants du formaldhéhyde : l'hydroxyle et le reste hydroxyméthylique :

(I) ⇌ (II) (III) ⇌ (IV)

On comprend ainsi que, le cyclohexatriénol (I) conduisant à l'*o*-hydroxyméthylphénol, c'est-à-dire à la saligénine, le cyclohexadiénol (III), à pont instable, engendre le *p*-hydroxyméthylphénol :

```
    OH                                 HO  HO               O                     OH
    |                                    \/                 ||                    |
    C<------- HO                         C                  C                     C
HC       CH        \              HC         CH      HC         CH         HC          CH
                    CH2OH   →                    →                    →                     .
HC       CH                       HC         CH      HC         CH         HC          CH
    CH<-------                        HC–CH2OH           HC–CH2OH                C–CH2OH
```

Ces vues, émises sur le plan purement atomique, ne paraissent pas être en désaccord avec les hypothèses électroniques [4], étendues au cas des phénols.

Du fait, d'ailleurs, que les réactions de β-hydroxycarboxylation dont je cherche à élucider le mécanisme, entre autres les réactions de condensation entre phénols et aldhéhydes, sont exclusivement, pour l'instant. celles qui s'établissent *en milieu aqueux alcalin*, on doit considérer que ce sont, en fait, des réactions entre ions, auxquelles j'ai reconnu qu'il est possible de donner, précisément, une interprétation ionique.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Préparation et propriétés du benzylcæsium.* Note [1] de M. **Jean de Postis**, présentée par M. Louis Hackspill.

L'attaque du benzène, pur et sec, par le cæsium a été observée il y a plus de trente ans [2]. Elle a lieu sans dégagement gazeux, et donne naissance à un produit amorphe noir, insoluble dans le benzène et dans l'éther, spontanément inflammable à l'air, donnant avec l'eau de l'hydrate CsOH et un carbure d'hydrogène solide fondant vers 70°.

Nous avons repris cette expérience en remplaçant le benzène par le toluène.

Les corps réagissants, soigneusement purifiés, étaient amenés au contact par distillation dans le vide de la trompe à mercure.

A froid, le cæsium est apparemment inaltéré sous le carbure, la surface du métal reste brillante; mais, au voisinage de 28°,5, température de fusion du cæsium, une réaction prend naissance, avec formation d'un produit floconneux brun foncé et dégagement d'hydrogène. En chauffant légèrement, l'attaque devient rapide et, en présence d'un excès de toluène, on arrive par agitation à transformer la totalité du métal mis en jeu.

La combinaison obtenue n'est soluble ni dans le toluène, ni dans l'éther, ni dans le cyclohexane. Après séchage dans le vide, c'est-à-dire débarrassée de tout liquide humectant, sa couleur reste brune, mais d'un ton beaucoup plus

---

(4) B. Eistert, *Tautomerie und Mesomerie*, 1938. Stuttgart.

(1) Séance du 16 avril 1945.

(2) L. Hackspill, *Comptes rendus du Congrès de Chimie*, New-York, 2, 1912, p. 113; *Helv. Chim. Acta*, 11, 1928, p. 1003.

clair. Dans cet état elle se détruit rapidement à l'air en répandant une forte odeur d'acide phénylacétique.

Sa formule a été établie de plusieurs manières :

1° La masse de cæsium mis en œuvre étant connue, on a mesuré le volume d'hydrogène dégagé :

Masse de cæsium..	0,518 (4)
Volume gazeux recueilli à 15°, 760^{mm} Hg..............	43$^{cm^3}$

Théoriquement, à 0° et 760^{mm} Hg, on aurait

$$\frac{11200 \times 0,5184}{133} = 43^{cm^3},5 \qquad (Cs = 133),$$

ce qui, ramené à 15°, donne 45$^{cm^3}$,8 au lieu de 43$^{cm^3}$ obtenu expérimentalement.

On peut donc évaluer le rendement de la réaction en produit de subtitution à $43/46 = 0,94$ environ.

2° La combinaison obtenue a été pesée dans le vide, ce qui a donné

$$\frac{\text{masse de composé}}{\text{masse de cæsium}} = \frac{2^g,176}{1^g,347} = 1,62.$$

Le calcul donne

$$\frac{C_7H_7Cs}{Cs} = 1,685, \qquad \text{tandis que } \frac{C_7H_6Cs_2}{2\,Cs} = 1,338.$$

3° Une quantité calculée de chlorure de benzyle $C_6H_5—CH_2Cl$, ajoutée graduellement à de l'éther tenant en suspension le composé cæsique, attaque ce dernier et fournit un précipité blanc de chlorure de cæsium. L'éther évaporé abandonne des cristaux de dibenzyle fondant à 52°. Il paraît naturel d'admettre que la réaction est la suivante :

$$C_6H_5—CH_2Cs + C_6H_5+CH_2Cl \rightarrow ClCs + C_6H_5—CH_2—CH_2—C_6H_5.$$

4° L'iode introduit dans les mêmes conditions fournit également le dibenzyle et l'iodure de cæsium :

$$C_6H_5—CH_2\boxed{Cs + 2I + Cs}—CH_2—C_6H_5.$$

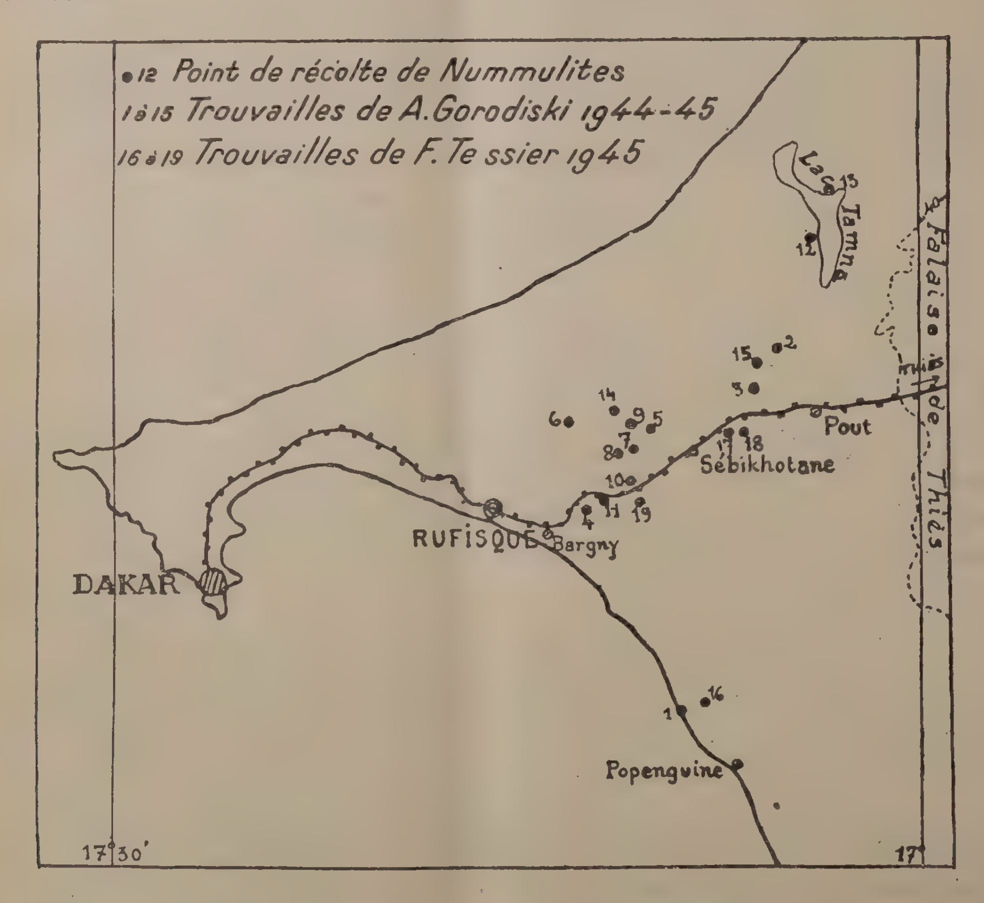
5° Enfin, avec l'anhydride carbonique, en milieu éthéré, on obtient l'acide phénylacétique facile à caractériser

$$C_6H_5—CH_2Cs + CO_2 \rightarrow C_6H_5—CH_2—CO_2Cs.$$

En résumé, le cæsium réagit à partir de sa température de fusion sur le toluène en donnant le composé $C_6H_5—CH_2Cs$ (benzylcæsium), solide brun, d'apparence amorphe, réagissant dès la température ordinaire sur un grand nombre de corps.

GÉOLOGIE. — *Contribution à l'étude du Lutétien du Sénégal.* Note [1] de MM. **Alexandre Gorodiski** et **Fernand Tessier**, présentée par M. Charles Jacob.

F. Jacquet [2] a donné une coupe de Dakar au Cayor, considérée jusqu'à ces derniers temps comme un schéma de la stratigraphie du Sénégal. La découverte, au cours des années 1944 et 1945, de nombreuses Nummulites lutétiennes dans des faciès auparavant attribués à l'Éocène de base oblige à modifier cette coupe dans le secteur compris entre Rufisque et la falaise de Thiès. On trouvera sur le croquis au 1/500.000e la position des points de récolte.



Faciès. — Le pédoncule de la Presqu'île du Cap Vert est constitué sur une douzaine de kilomètres par une épaisse accumulation sableuse présentant en surface des modelés dunaires plus ou moins récents. Ces sables masquent

(1) Séance du 4 Février 1946.
(2) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 335

complètement la relation de la série de Dakar avec une série marneuse qui affleure dès l'ouest de Rufisque et que constituent les Marnes de Tiokho à l'Ouest et les Marnes de l'Ouaiga à l'Est. Ces dernières, dont l'épaisseur minima est de 40 mètres (base inconnue), sont surmontées par les Calcaires de Bargny (15 mètres environ) localement discordants : dépôts bréchoïdes et phosphatés à la base. On y relève de nombreuses intercalations de marnes ainsi que plusieurs niveaux de silex et divers faciès calcaires englobés sous la même rubrique. Au-dessus viennent des argiles blanches légèrement marneuses (Yen, Pantior, Camp de Sébikotane) contenant à divers niveaux des bancs plus durs : silex blanc bleuté, calcaire siliceux brun, calcaire phosphaté silicifié (Sébikotane), calcaire phosphaté (Keur Yakha N'Diaye), silex phosphatés (Lguer), phosphate de chaux (Keur Yakha N'Diaye).

La série se termine au lac Tamna par des calcaires blancs lapiazés, peu épais; vers la côte sud ils deviennent en partie gréso-glauconieux.

L'ensemble lithologique énuméré correspond aux n°s 4 à 7 de la coupe I de Jacquet [1] et se développe d'Ouest en Est.

Age. — La faune découverte nous interdit de subordonner cette série à la suite naturelle de la coupe : calcaires coquilliers de Bandia et marnes de la falaise de Thiès, que, à la suite de Jacquet, nous considérons comme probablement yprésiennes. En effet, dans de nombreux silex trouvés sur les aires d'extension des Marnes de L'Ouaiga, dans le calcaire de Bargny et dans les faciès supérieurs, L. M. Davies, qui a bien voulu se charger de l'étude de ces échantillons, a déjà déterminé des espèces de Nummulites dont certaines ont été signalées en d'autres points du Sénégal [3] :

Nummulites curvispira (Savi et Menegh.) très nombreuses. — Points 1, 3, 18, 19.
N. cf. gizehensis (Forskal) fragments. — Points 3, 19.
N. cf. Heeri (de La Harpe) rares ou très rares. — Points 1, 3.
N. cf. Beaumonti (d'Archiac) rare. — Point 3.

N. Beaumonti d'Archiac n'avait pas encore été signalée au Sénégal; seule sa forme mégasphérique *N. sub.-Beaumonti* de La Harpe l'avait été [2].

L'âge de ces formations est donc Lutétien Supérieur; la présence de quelques rares *N. Heeri* ne pouvant être retenue en face de l'abondance de *N. curvispira*.

Les autres fossiles, en particulier diverses espèces d'Orthophragmines, n'ont pas encore été l'objet de déterminations.

Quel est donc le rapport de ce Lutétien Supérieur avec l'Yprésien de la falaise de Thiès qui le domine topographiquement à l'Est? L'Yprésien ayant un faible pendage Est (6/1000 à Thiès), et le niveau Lutétien à *N. curvispira* ayant été en plus retrouvé à l'Est de la falaise, il y a lieu de penser qu'une faille a abaissé le compartiment situé à l'Ouest de la falaise, mais son tracé exact sur le terrain reste encore à préciser.

---

(3) J.-F. Flandrin et F. Jacquet, *Bull. Soc. Géol. France*, 5e série, 6, 1936, pp. 363-373.

En conclusion : 1° la série citée à partir des Calcaires de Bargny inclus appartient certainement au Lutétien Supérieur;

2° elle ne présente pas de relation visible avec la série de Dakar;

3° elle est séparée de la falaise de Thiès par un contact anormal vraisemblablement faillé.

GÉOLOGIE. — *Sur le dispositif des fractures dans la région d'Abreschviller, au Sud de Sarrebourg.* Note [1] de M. **Fridolin Firtion**, présentée par M. Emmanuel de Margerie.

Les pentes vosgiennes vers Sarrebourg présentent la succession classique des terrains triasiques depuis le Grès vosgien des crêtes jusqu'au Muschelkalk sarrebourgeois, succession dont la régularité est pourtant troublée par des failles d'âge alpin déjà observées avant moi [2], mais au sujet desquelles il m'est possible de présenter quelques précisions, à la suite de courses autour d'Abreschviller, antérieures à 1939.

Les deux Sarre, blanche et rouge, et la Bièvre, ainsi que leurs affluents, entaillent en un dispositif sensiblement conséquent dans l'ensemble (sauf quelques irrégularités de détail sur lesquelles je ne puis m'arrêter ici), les tables gréseuses et marno-dolomitiques triasiques, de manière assez sensible pour permettre l'observation d'ailleurs difficile en contrée boisée.

1. *Failles directionnelles.* — Les failles les plus apparentes, au moins par leur nombre, sont orientées SSW-NNE et groupées en un faisceau assez serré qui est relayé au NE par le faisceau de Phalsbourg comportant des failles de même direction générale. On est ainsi amené à considérer toutes ces failles comme directionnelles rhénanes.

Suivies de plus près, les failles ne sont d'ailleurs ni rectilignes, ni exactement parallèles entres elles. Leurs amplitudes approximatives qui varient pour une même faille au long de son parcours, sont elles-mêmes très diverses. Les valeurs maximales de ces amplitudes sont indiquées entre parenthèses dans le texte ci-après. On peut distinguer en descendant la pente vosgienne, de l'E à l'W, les failles suivantes : 1° faille Saint-Quirin, Abreschviller, La-Valette (20^m), se prolongeant au NE par la faille Sitifort, Rehthal qui se continue vers Arzviller (20^m); 2° faille Saint-Quirin, Vasperviller, Abreschviller, Biberkirch, Vallerysthal, Schafkopf ($20\text{-}60^m$); 3° faille Saint-Quirin, Chapelle Sainte-Claire, Vasperviller, la Tuilerie, Voyer ($5\text{-}15^m$); 4° faille Voyer, Melkerhof, Schindelthal ($20\text{-}25^m$); 5° faille Halle, Pont-Poucher, Haute-Bourdonne (12^m); 6° faille Halle, Jean Limon,

---

(1) Séance du 4 février 1946.

(2) Notamment par A. Tornquist, L. van Werveke, dont les levés ont été utilisés en vue de l'établissement de la carte murale d'Alsace et de Lorraine au 1/200000e sous la direction de E. de Margerie.

Barville-Haut, Bourdonne, Harzwiller, Schindelthal (12-20^m). En plus à l'W de ce réseau, un accident, en grande partie masqué par des formations superficielles, affecte près de Hesse le Muschelkalk inférieur et moyen.

Les failles ont presque toutes un regard WNW, à l'exception des failles numérotées ci-dessus 3° (Saint-Quirin-Voyer) et 5° (Halle-Haute-Bourdonne), qui sont légèrement compensatrices. Elles découpent la pente vosgienne en compartiments allongés directionnellement, monoclinaux, oligoclinaux ou aclinaux, parfois légèrement gauchis, tel celui borné par les failles 2° et 4°, faiblement incurvé en voûte entre Voyer et Biberkirch.

2. *Failles transverses.* — Elles sont moins nombreuses que les précédentes, de direction moins constante et moins rectilignes. Des accidents de même direction se retrouvent dans la région de Lunéville (carte géologique au 1/80000e, feuille 70, Lunéville, 2e édition). Ce sont du NE au SW : 1° faille Saint-Léon, Wolfsthal, Voyer, Barville-Bas (20^m); 2° faille Saint-Quirin, Engelthal, Quatre-Chemins, Kulberg (40-50^m); 3° faille Saint-Quirin, Chapelle Notre-Dame-de-Lohr, Halle, Halmoze, Fraquelfing (20-60^m); 4° faille forêt de Labreheux, Voinotte, Neuve-Grange, Niederhof (35-80^m) qui paraît être en continuité avec la faille du Blanc-Rupt qui s'étend jusqu'au pied Nord du Donon (60^m).

Conclusion. — Parmi toutes ces fractures, c'est le faisceau de failles directionnelles qui attire surtout l'attention. Sa parenté avec le faisceau de Phalsbourg, qui le relaie au Nord-Est, et avec le système de failles directionnelles du champ de fractures de Saverne, est très sensible. On notera en outre le fait suivant : tandis que les failles sont en direction rhénane dominante SSW-NNE, leur ensemble : faisceaux d'Abreschviller et de Phalsbourg réunis, se dessine en une zone de direction SW-NE, dispositif en écho de tectonique hercynienne (varisque) sur lequel M. G. Dubois [3] a rappelé récemment l'attention en ce qui concerne le champ de fractures de Saverne.

GÉOCHIMIE. — *Étude d'un glissement de terrain dû à la présence de Glauconie.* Note de Mme **Marthe Proix-Noé**.

Les falaises mollassiques qui couronnent l'amphithéâtre de la baie d'Alger s'effondrent périodiquement à la fin de la saison des pluies dans la région dite de Mustapha Supérieur. Il y a éboulement de la falaise et glissement des marnes sur les pentes. Ces accidents avaient déjà été observés par la Société Géologique de France lors de sa réunion extraordinaire à Alger le 7 octobre 1896 [1]. Depuis 1896 l'amplitude de ces

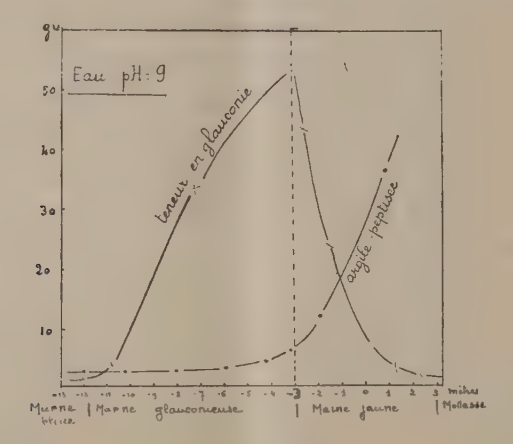
---

(3) *C. R. Soc. Géol. Fr.*, n° 15, 1944, pp. 169-171.

(1) Ficheur, *Bull. Soc. Géol. Fr.*, 24, 1896, pp. 944-949 et 959-973.

accidents ne fait que croître par suite du déboisement effectué sur les pentes en vue de lotissements urbains.

La coupe géologique des terrains affectés est la suivante : la molasse de Mustapha forme des falaises pouvant avoir une épaisseur de 80^{m} dont 35 à 40^{m} visibles ; c'est un calcaire sableux ou gréseux blanc jaunâtre à *Pecten scabrellus*, en contact franc avec des marnes grises, bleues ou jaunâtres, sableuses ou à lits sableux fossilifères à *Ostrea cochlear* et *Turritella angulata*, d'épaisseur variable ; elles se rattachent au Plaisancien et surmonteraient des marnes bleues d'époque carténienne, d'épaisseur également variable en contact franc sur des grès carténiens compacts.



En janvier 1943, l'éboulement de la falaise a pris l'aspect d'un effondrement de blocs de mollasse dans l'assise marneuse. Nous avons étudié les causes physico-chimiques du phénomène. Au moment des pluies, la quantité d'eau qui afflue est considérable, tant par ruissellement que par infiltration ; cependant la localisation des effondrements oblige à ne considérer que les eaux d'infiltration provenant soit de l'impluvium, soit des eaux de circulation souterraine et affectant un terrain particulier très localisé. Les eaux en circulation souterraine proviennent de la plaine de Châteauneuf, qui reçoit en outre les eaux de ruissellement du massif montagneux de la Bouzareah.

La visite sur le terrain après l'effondrement et entre deux grosses averses a permis de constater qu'il n'y avait aucun suintement d'eau dans la mollasse. D'autre part toute la masse argileuse est imprégnée d'eau jusqu'à l'assise gréseuse, mais il n'a pu être fait de prélèvement d'eau que dans la marne jaune sous la mollasse.

On peut en conclure que l'eau en circulation dans toute la marne trouve un passage privilégié dans la marne jaune. Le pH pris sur le terrain est fortement alcalin (pH 9). L'analyse chimique de l'eau ci-après donne,

Composition chimique de l'eau circulant dans la marne

(1 litre d'eau contient : résidu sec à 180°, 0g,914).

			g
Cation...	potassium.......	K_{+}....................	0,051
	sodium..........	Na_{+}....................	0,183
	calcium.........	Ca_{++}....................	0,160
	magnésium......	Mg_{++}....................	0,024
	fer + aluminium.	$Fe_{+++} + Al_{+++}$..........	0,010
Anion...	sulfurique.......	SO_{4--}....................	0,104
	chlore..........	Cl_{-}....................	0,189
	carbonique......	CO_3H_{-}....................	0,140
Acide non dissocié, silice....		SiO_2....................	0,147

outre les teneurs habituelles en électrolytes pour l'Algérie, une forte proportion de silice et d'ions alcalins. Un sondage exécuté sous les jardins d'El Biar directement menacés à été étudié au laboratoire, il en résulte que :

1° la glauconie se trouve à tous les niveaux sous l'aspect de grains typiques vert foncé et en quantité croissante jusqu'au niveau — 3m (courbe) et décroît brusquement, les grains s'altèrent et dans la mollasse ils se colmatent dans la masse.

2° à tous les niveaux, la glauconie est associée au même complexe de micro-fossiles, dont l'abondance est proportionnelle aux grains de glauconie.

3° à tous les niveaux on retrouve les mêmes grains de quartz anguleux en proportions constantes.

4° la composition de l'ensemble marneux, que l'on peut exprimer par le rapport CO_3Ca/argile, est légèrement croissante jusqu'au niveau — 3m, où elle augmente brusquement jusqu'à la mollasse (courbe).

La marne jaune apparaît comme le lieu de réactions physico-chimiques intenses entre les niveaux — 3 et 0m.

L'action géochimique de l'eau est déterminée par la présence de la glauconie. La glauconie est essentiellement un aluminosilicate hydraté à fortes teneurs en potassium, dont la structure se prête aux échanges de bases [2].

En traversant la mollasse ou des terrains calcaires, l'eau s'est chargée en électrolytes, en particulier en sels de calcium. Au contact avec de la glauconie, il y a fixation de l'ion Ca″, et mise en liberté d'ions alcalins qui fixent l'eau à pH 9. L'eau alcalinisée agit comme agent peptisant sur les micelles colloïdales et hydrolyse les aluminosilicates, de sorte que la perméabilité augmente par remise en suspension des particules qui sont entraînées par l'eau en circulation et par la solubilisation de l'ion silicique. L'assise marneuse perd progressivement sa rigidité et glisse. L'affouillement à la base de la falaise provoque l'effondrement périodique de celle-ci.

---

[2] JOHN W. GRUNER, *The American Mineralogist*, 20, 1935, p. 699; V. I. PARAMONOVA et E. A. MATEROVA, *Pedology* (en russe), 6, 1940, p. 65.

PALÉONTOLOGIE. — *Découverte en Europe de Ruminants fossiles à corne occipitale.* Note [1] de MM. **José F. de Villalta Comella**, **Origuel Crusafont Pairo** et **René Lavocat**, présentée par M. Charles Jacob.

On sait qu'il existe dans le Tertiaire supérieur des États-Unis un groupe de Ruminants, les Craniocératinés, qui possèdent, en outre des habituelles cornes orbitaires du frontal, une corne occipitale impaire bien développée. Par leur dentition, ces animaux se montrent voisins des Paléomérycidés européens. Bien que les mâchoires de ceux-ci soient assez abondantes dans plusieurs gisements, on n'a jamais signalé jusqu'ici de cornes pouvant leur être attribuées. Mais si l'on peut, à cause de cela, supposer que les *Paleomeryx* au sens strict étaient inermes, nous venons d'acquérir la certitude qu'il a existé dans le Tertiaire espagnol des Ruminants, très proches de *Paleomeryx* par leur dentition et munis d'une corne occipitale comme les *Cranioceras*. En effet le gisement de la Hidroelectrica dans la vallée du Manzanares, près de Madrid, a fourni les dentitions inférieures et supérieures, à type *Paleomeryx*, de plusieurs individus, en étroite association avec une corne orbitaire, une de position douteuse, et deux occipitales. Ces dernières se distinguent de leurs homologues américaines par le fait qu'elles sont bifurquées distalement, au lieu d'être simples.

Le gisement renferme également *Mastodon angustidens* et *Anchitherium aurelianense* de petite taille, *Bunolistriodon latidens*, *Lagomeryx Meyeri* (déterminations Villalta et Crusafont). Cette association caractérise normalement le Miocène. C'est donc approximativement à la même époque qu'en Amérique, sinon même antérieurement, que nous constatons la présence en Europe, où il est signalé pour la première fois, du type si particulier de Ruminant, objet de la présente Note [2].

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Pléomorphisme du* Penicillium notatum *et potentialité antibiotique.* Note de MM. **Henri Velu**, **Jean Comandon**, **Pierre de Fonbrune** et **Maurice-Marie Janot**, présentée par M. René Souèges.

Dès le début de ces recherches sur le *Penicillium notatum*, nous avons été frappés par l'apparition, sur la gélose de Czapeck, la gélose d'isolement de Sabouraud, plus rarement sur gélose au moût, fréquemment sur les voiles en milieu liquide, de colonies secondaires blanches, duveteuses, qui rappellent immédiatement les cultures pléomorphiques des teignes.

---

(1) Séance du 4 février 1946.

(2) M. Jean Viret, qui a eu communication de moulages desdites cornes, veut bien me faire savoir que ses conclusions sont analogues aux miennes (R. Lavocat).

Au cours de nos essais sur la dissociation et sur les variations du *P. notatum* et sur l'analyse de la potentialité antibiotique des spores, d'abord par la méthode des dilutions et ensuite par la méthode des cultures monospores au micromanipulateur (1), nous avons obtenu, de façon régulière, sur gélose de Sabouraud, à partir de souches diverses, un certain nombre de types parmi lesquels une variété blanche, sporulant mal, ou même totalement asporogène qui représente un cas nettement caractérisé de pléomorphisme (au sens de Sabouraud). Ce pléomorphisme est défini par la perte progressive ou brutale des caractères culturaux : la margination de plus en plus envahissante des colonies, qui, finalement, sont constituées en totalité par un mycélium blanc mat, exubérant, très duveteux, poussant jusque sur les parois du tube; la faible coloration ou l'absence de coloration des revers; l'exsudation nulle ou peu accusée et, dans ce cas, incolore; l'irrégularité de forme et de taille, ainsi que la mouillabilité des spores quand elles existent; la présence d'hyphes avec cellules souvent boursouflées, bourgeonnantes, dans les cultures plurispores en chambre à huile (2).

Les souches 4222 de l'Institut Lister, 1249 des N. R. R. L. (Northern Regional Research Laboratories, Peoria, U. S. A.), 1978 ont présenté une tendance très marquée au pléomorphisme, tendance beaucoup moins accusée chez d'autres souches, chez 832 N. R. R. L. 1951 (*P. chrysogenum*) par exemple.

Nous avons suivi sur l'une d'elles (4222 de Lister), pendant trois générations monospores, la fixité des caractères de trois types dissociés, dont un blanc pléomorphique. Les 56 mycéliums obtenus sur Sabouraud à la troisième génération reproduisent très exactement les caractères des mycéliums déjà sélectionnés dont ils sont issus. Les souches pléomorphisées donnent fréquemment, en milieu liquide, des cultures submergées, d'aspect gélatineux, visqueux, qui finissent par produire tardivement un voile secondaire. Leur activité bactériostatique est souvent très faible ou nulle; d'autres fois elle est égale à celle des autres dissociations de la même souche, ce qui tendrait à faire croire que ces variations d'activité sont le fait d'un pléomorphisme incomplet et de la formation lente et difficile des voiles en milieu liquide.

Par cultures successives, la transformation pléomorphique devient de plus en plus complète; les phialospores finissent par disparaître. Le retour au type d'origine devient de plus en plus difficile sur Sabouraud, comme Langeron et Milochevitch l'ont observé pour les dermatophytes (3).

---

(1) *Soc. franc. de Microbiol.*, séance du 7 février 1946.

(2) J. Comandon et P. de Fonbrune, *Ann. Inst. Pasteur*, 60, 1938, p. 113.

(3) *Ann. de Parasit.*, 15, 1937, p. 177.

Cependant, lorsque la culture n'est pas complètement pléomorphisée, le passage sur moût permet, dans une certaine mesure, ce retour plus ou moins rapide au type d'origine, mais les colonies conservent alors une large marge blanche, duveteuse, asporogène; cette constatation vient à l'appui de la thèse de Langeron et Milochevitch sur l'absence de pléomorphisme des dermatophytes dans les milieux naturels.

En résumé, comme les dermatophytes, le *Penicillium notatum* peut présenter un pléomorphisme, difficilement réversible, qui peut s'accompagner d'une réduction ou même de la suppression de l'activité bactériostatique. La margination marquerait le premier pas vers le pléomorphisme. Les cultures monospores semblent indispensables pour faciliter l'obtention de spores à grande potentialité antibiotique.

ÉCONOMIE RURALE. — *Essais de culture de 23 variétés de Soja à la Station universitaire de Richelieu (Indre-et-Loire).* Note de M. **Émile Brumpt**, présentée par M. Maurice Javillier.

Parmi les produits alimentaires qu'il est inutile d'acheter à l'étranger, nous tenons à signaler le Soja qui, nous en sommes persuadé, sera, un jour ou l'autre, cultivé par nécessité dans plusieurs régions de la France où prospèrent la Vigne et le Maïs, et même dans des régions moins tempérées.

D'après certains auteurs, il existerait douze cents variétés de Soja (Kornfeld, 1935); pour d'autres, ce chiffre pourrait atteindre deux ou trois mille.

Tous les peuples d'Extrême-Orient utilisent cette plante depuis la plus haute antiquité. Le Soja est un aliment complet dans lequel les diverses substances nutritives sont très bien équilibrées, Le Dr Georges [1], d'Antibes, a fait remarquer que 72^{kg} de graines de Soja renferment en moyenne 26^{kg} de protides et 14^{kg} de lipides, quantités nécessaires et suffisantes pour l'entretien d'un adulte de 65^{kg} pendant 365 jours. Or, ces 72^{kg} de graines, nous avons pu les obtenir à Richelieu [2] sur une surface de 3 ares; il est donc permis d'admettre qu'un hectare de Soja pourrait suffire à l'entretien de 33 sujets adultes de 65^{kg}.

La culture du Soja est facile, car elle est identique à celle des haricots que tous les agriculteurs de France savent pratiquer.

Le Soja ne peut être utilisé dans l'alimentation humaine en Europe que sous forme de farines, déshuilées ou non, et de lait. C'est surtout le lait de Soja, facile à préparer, qui intéresse les agriculteurs, car il permet de remplacer le lait maternel dans l'alimentation des veaux. C'est grâce à l'utilisation de cette technique que les Hollandais et les Danois, grands importateurs de Soja, peuvent transformer le lait de vache en beurre et en fromages qu'ils exportent.

Afin de connaître les meilleures variétés de Soja à utiliser en Touraine, nous avons entrepris depuis 1943 des essais qui nous ont permis de retenir les

(1) *Rev. Intern. Soya*, **2**, 1942, p. 14.
(2) *Ibid.*, **3**, 1943, pp. 147-149.

variétés qui sont susceptibles de mûrir dans cette région. Nous donnons dans le tableau ci-dessous un résumé de nos recherches. Les analyses chimiques ont été effectuées par M. et Mme Gonard.

Variétés de Soja cultivées à la Station expérimentale du Domaine universitaire de Richelieu (Indre-et-Loire).

Variété, par ordre de précocité.	Ensemencement.	Récolte.	Maturité (nombre de jours).	Rendement par poquet. (en g).	Rendement à l'hectare. (en kg).	Matières (%) grasses.	Matières (%) protéiques.
A. *Année* 1944.							
Kouban 0,375	29/4	5/9	129	21,4	1926	15	35,3
Rouest 178	29/4	5/9	129	15,5	1395	14,4	33,1
» 29	28/4	5/9	130	20,5	1845	13,3	42,5
S 3828/38	2/5	10/9	132	10,8	972	13,3	33,1
Dieckmann schwarze	29/4	10/9	134	23,8	2142	17,4	33,2
» fruhgelbe	28/4	10/9	135	15,5	1395	16,25	38
» grüngelbe	28/4	10/9	135	17,9	1611	16,4	31,5
» hellgelbe	1/5	15/9	138	9,7	873	16,9	36,2
Illini Garnier	28/4	15/9	140	14,7	1223	13,2	38,7
Vilnensis	28/4	10/9	145	10,8	972	12,9	40,6
Tokio noir	29/4	25/9	149	18,2	1638	14	35
Hispida Vilmorin	29/4	1/10	154	23,5	2115	?	?
P. G. A. Dr Georges	28/4	4/10	159	22,5	2025	13,7	36,8
Illini Bordeaux	28/4	8/10	163	18,8	1692	?	?
Rouest Garola	29/4	20/10	174	14,7	1323	14,5	36,2
Soy Sota	29/4	20/10	174	23,4	2106	16,4	35,3
B. *Année* 1945.							
Superearly Chéron	24/4	10/8	108	12,4	1116	–	–
Hâtif jaune »	24/4	14/8	112	12	1080		–
Rouest 29	24/4	20/8	118	18,20	1638		–
Tokio noir	24/4	27/8	125	23	2070		–
Kouban 0,375	24/4	28/8	126	18,6	1674	–	–
Dieckmann grüngelbe	24/4	28/8	126	19,3	1737	15,5	33,6
» frühgelbe	24/4	1/9	130	12,7	1136		–
Universal	24/4	6/9	135	18,5	1665	–	–
Platter 458	24/4	7/9	136	16,3	1467	15,1	33
Comtesse de St-Baudel	24/4	7/9	136	10,1	909	–	–
Dieckmann schwarze	24/4	11/9	140	20,56	1850	–	
N^lle^ var. Platter gelbe	24/4	11/9	140	20	1800	16,8	33,2
Illini Garnier	24/4	15/9	144	11,8	1062	-	–
Platter 464 (³)	24/4	15/9	144	26,33	2369	17,5	33,1
Hispida Vilmorin	24/4	15/9	144	19	1710	–	
P. G. A. Dr Georges	24/4	1/10	160	21,86	1967	16	30,6

(³) Cette variété, relativement précoce et très prolifique, a malheureusement l'inconvénient de garder ses feuilles à la maturité, ce qui complique la récolte et le battage.

En 1946 nous poursuivrons nos études en observant, en outre, le comportement d'un assez grand nombre de variétés, sélectionnées aux États-Unis, que MM. H. J. van Cleave et C. M. Woodworth nous ont expédiées il y a quelques jours.

BIOLOGIE AGRICOLE. — *Courbes caractéristiques du développement du grain de Blé au point de vue physique.* Note de MM. **Henri Geslin** et **Pierre Jonard**, présentée par M. Maurice Javillier.

Une étude d'ensemble de la maturité du Blé doit comporter nécessairement à la base l'étude, en fonction des facteurs du milieu, des courbes caractéristiques du développement du grain. Suivant une technique déjà utilisée [1], celles-ci peuvent être établies directement en fonction du facteur physique dont l'action apparaît prépondérante. On porte alors en abscisses, non plus le temps exprimé en jours, comme on le fait habituellement, mais la somme des valeurs journalières accumulées de l'élément considéré. Celui-ci peut être, par exemple, soit la température, soit la radiation globale ou une combinaison de ces deux éléments, telle que celle définie par l'un de nous [2] sous le nom de *facteur physique élémentaire d'action* K. Les courbes obtenues sont extrêmement régulières et suggestives, mettant bien en évidence l'action de chacun de ces éléments sur les phénomènes étudiés. Nous ne donnons ci-dessus que les courbes établies en fonction du facteur d'action K. Avec la température ou la radiation globale, les résultats obtenus sont entièrement comparables.

Les courbes 1 et 2 sont relatives à la variation du poids de 1000 grains, frais ou secs. Ce sont des courbes classiques, dont la régularité doit être soulignée plus spécialement. Le maximum de poids frais ou de poids sec est atteint simultanément quelques jours avant la maturité, puis le poids sec se maintient constant, tandis que le poids frais diminue rapidement suivant une loi sensiblement linéaire (branche descendante de la courbe approximativement rectiligne), jusqu'à un équilibre correspondant à l'humidité normale du grain au moment de la récolte.

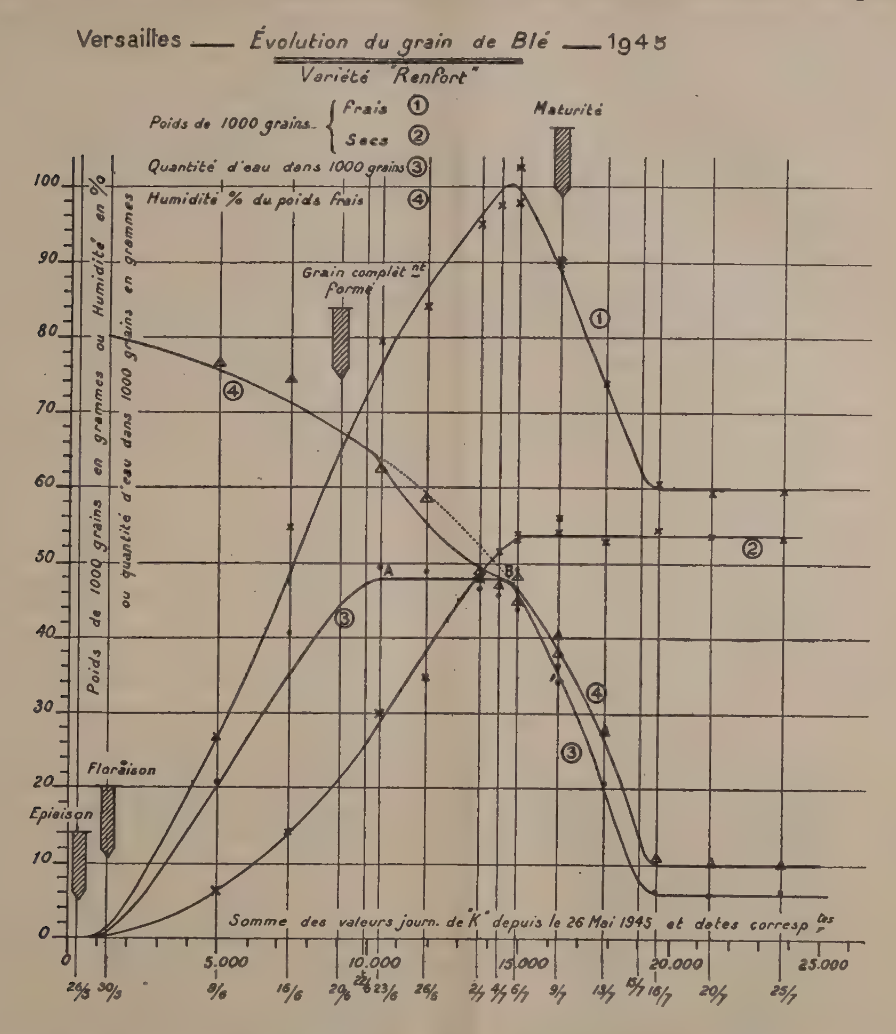
La courbe 3 se rapporte à la quantité d'eau, en valeur absolue, contenue à chaque instant dans 1000 grains. Elle doit retenir plus complètement notre attention. Au cours d'une première phase allant de l'épiaison jusqu'au moment où le grain a pris sa forme définitive, la quantité d'eau, en valeur absolue, augmente régulièrement et rapidement. Puis, tandis que le volume

---

(1) H. Geslin, *Thèse*, Paris, 1944.

(2) Le facteur d'action K est défini comme le produit de la température moyenne journalière par la racine carrée de la radiation globale correspondante. Cf. Mémoire précédent, p. 81 et suivantes.

et la densité du grain continuent à croître, la quantité d'eau contenue dans le grain se maintient constante pendant une dizaine de jours environ. Le palier $\overline{AB}$ s'achève sensiblement au début du stade *pâteux*, qui précède



de quelques jours la maturité physiologique (³). On constate ensuite une dessiccation rapide du grain suivant une loi sensiblement linéaire, comme dans le cas de la courbe 1.

On peut penser que la première partie de la courbe 3 correspond à la phase de multiplication cellulaire; la seconde, bien que l'enrichissement du grain en principes immédiats se poursuive, à la phase de condensation active notamment des matières protéiques; la troisième à la phase

(³) Les grains ne se laissent pas écraser entre les doigts, mais l'ongle s'imprime encore dans la substance du grain comme dans un morceau de cire; la paille est verdâtre sur 2 à 3^{cm}, juste au-dessous de la base de l'épi.

purement physique de dessiccation du grain, l'évolution biochimique de celui-ci étant pratiquement achevée. Corrélativement à l'existence du palier $\overline{AB}$, notons la dépression correspondante observée sur la courbe 4 dans la diminution, par ailleurs extrêmement régulière, de l'humidité du grain exprimée en pour cent du poids frais.

Sans préjuger de ce que pourra apporter l'étude du biochimisme de la plante, la période caractérisée par le palier $\overline{AB}$ apparaît comme une période singulière que ne révélait pas l'examen des courbes de développement en poids frais et en poids sec. Elle constitue sans doute une phase critique dans l'évolution du grain. Si les conditions physiques externes nécessaires sont réalisées, c'est vraisemblablement au cours de cette phase que peut le plus facilement se produire le brusque blocage des matériaux constitutifs du grain, se traduisant notamment par l'échaudage.

Ajoutons que, en nous appuyant sur les observations et mesures biométriques effectuées sur diverses variétés et au cours d'années différentes, nous avons pu définir les caractéristiques du point de vue physique.

ENTOMOLOGIE APPLIQUÉE. — *Sur la substance qui, dans les feuilles de Melia Azedarach, repousse les Criquets.* Note [1] de M. **Rémy Chauvin**, présentée par M. Maurice Caullery.

Les arbres de la famille des Méliacées ont été l'objet d'investigations assez poussées de la part des botanistes et des chimistes. On a pu extraire de leurs fruits; de leurs feuilles et de leur écorce des principes amers, très voisins dans les différentes espèces et appelés suivant le nom de l'arbre, *caïl-cédrin*, *touloucounin*, *pseudo-cédrélin* etc. Ces corps viennent d'être étudiés avec soin par H. Moyse-Mignon [2]. En lisant cet auteur, on ne peut manquer d'être frappé de la grande analogie des propriétés du caïl-cédrin de *Khaya senegalensis*, avec celles de la substance étudiée par M. Volkonsky [3] dans les feuilles de *Melia azedarach* et qui fait fuir les Criquets de nombreuses espèces, lorsqu'on en asperge les végétaux qu'ils dévorent habituellement. J'ai tenté de vérifier cette analogie entre les deux substances, et j'ai obtenu des résultats positifs.

Pour extraire des feuilles de *Melia* la substance répulsive (que j'appellerai *méliatine*, car elle ne porte aucun nom jusqu'à présent), je me suis inspiré de la technique de Moyse-Mignon, en la simplifiant. Les feuilles de *Melia*, desséchées et pulvérisées, sont bouillies deux heures à reflux en présence de chloroforme, à raison de 5 centicubes de chloroforme par gramme de feuilles. On essore ensuite au Büchner, et l'on constate alors

(1) Séance du 4 février 1946.

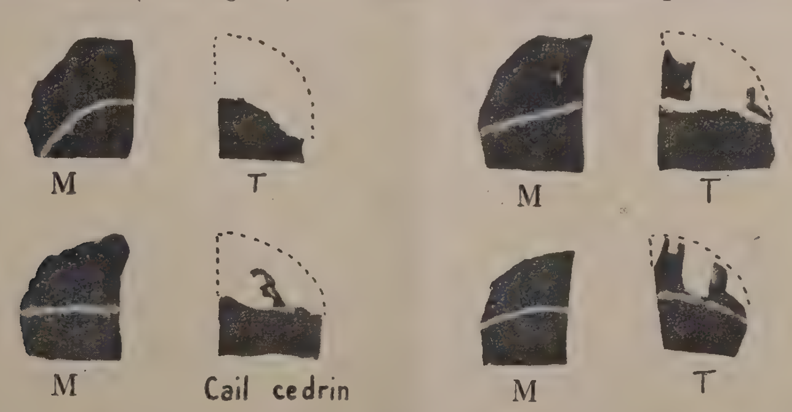
(2) *Sur quelques Méliacées africaines et leurs principes amers.* Thèse Pharmacie, Paris, 1942.

(3) *Arch. Inst. Pasteur Algérie*, **15**, 1937, p. 427.

que les feuilles ont perdu toute leur amertume, qui est passée dans le solvant. Ce dernier est évaporé à quelques centicubes et additionné de 10 fois son volume d'éther de pétrole; l'abondant précipité vert ainsi obtenu est redissous dans le chloroforme et la liqueur chromatographiée sur alumine. Il se forme trois zones superposées : une supérieure vert sombre peu étendue, une moyenne jaune verdâtre qui contient des caroténoïdes plus ou moins altérés, une inférieure constituée de deux bandes étroites. Quand toute la liqueur est passée, on ajoute du chloroforme à la partie supérieure de la colonne, jusqu'à écoulement de toute la zone verte inférieure : elle ne contient que peu ou pas de méliatine. Celle-ci s'adsorbe, en effet, en même temps que les caroténoïdes, dans la large zone jaune moyenne. Il suffit alors d'ajouter du solvant, jusqu'à ce que la liqueur recueillie à la partie inférieure de l'appareil ne soit plus que faiblement jaunâtre. Cette liqueur est évaporée à quelques centicubes et additionnée de 10 fois son volume d'éther de pétrole. Le précipité, jaune et très amer, est recueilli, séché et épuisé à l'eau bouillante, qui en extrait la méliatine; après refroidissement, on agite avec du chloroforme, qui enlève des impuretés et un peu de méliatine, puis on concentre au bain-marie.

On obtient une poudre jaune brunâtre, très amère, fondant au bloc Maquenne à 240°; on en retire environ 35^{mg} pour 100^{g} de feuilles. Elle est tout à fait analogue dans toutes ses propriétés, au caïl-cédrin de Moyse-Mignon.

La méliatine, en suspension dans l'eau, vaporisée sur des feuilles de scarole que l'on place dans l'étuve à 35°, protège celles-ci complètement de l'attaque du Criquet pèlerin, alors que des feuilles témoins sont totalement dévorées. Un échantillon de caïl-cédrin de *Khaya* (aimablement prêté par Mme Moyse-Mignon) n'a, au contraire, aucun pouvoir protecteur dans les mêmes conditions (voir figure) : comme il est aussi amer que la méliatine, il



Quelques tests sur Méliatine. — Un limbe de feuille de Scarole a été découpé en demi-cercle et le demi-cercle sectionné en deux moitiés d'égale surface. Les deux moitiés, dont la base trempe dans un peu d'eau (jusqu'au trait blanc indiqué sur les photos) sont placées dans l'étuve à 35° avec les Criquets. La moitié marquée M est imbibée de méliatine, l'autre, servant de témoin (T), ne l'est pas. Noter également l'attaque dans le cas de l'imbibition par le caïl-cédrin de *Khaya*.

en faut conclure que ce n'est pas le goût désagréable pour l'homme de ces substances qui repousse les Acridiens.

La structure chimique du caïl-cédrin et des substances voisines commence à être connue et sera complètement élucidée dans un proche avenir; ces corps sont relativement simples et l'on pourra sans doute en envisager la synthèse.

Nous disposerions alors, avec la méliatine, d'un moyen extrêmement efficace de lutte contre les Acridiens migrateurs, puisque les Insecticides, quoique très actifs, ne peuvent tuer assez vite les Criquets pour empêcher totalement leurs dégâts, et puisque, d'autre part, la méliatine est le seul acridifuge actuellement connu.

Rappelons que les expériences de protection des cultures, tentées par Volkonsky avec l'extrait brut de *Melia azedarach*, sur des céréales, ont donné des résultats positifs.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Suppression des troubles neuromusculaires de l'alcoolisme chronique expérimental par injection ou ingestion de vitamines* B_3 *et* B_4. Note [1] de MM. **Raoul Lecoq**, **Paul Chauchard** et M[lle] **Henriette Mazoué**, présentée par M. Emmanuel Leclainche.

On admet que le métabolisme de l'alcool éthylique (éthanol) s'effectue en passant par les stades intermédiaires de désintégration : acétaldéhyde et acide acétique, grâce à l'intervention d'un système enzymatique accepteur d'hydrogène, composé d'alcooldéshydrase et d'un coferment, dinucléotide dont les bases sont l'amide nicotinique et l'adénine. Mais les doses d'alcool supportées sans perturbation apparente, par l'Homme comme par les animaux, restent voisines de 1^g par kilo et par 24 heures, les quantités plus fortes aboutissant plus ou moins rapidement à des manifestations de déséquilibre alimentaire, caractéristiques de l'alcoolisme chronique [2]. Ces faits étant connus, on peut se demander s'il n'est pas possible d'augmenter les doses d'alcool normalement métabolisées par l'organisme en mettant à la disposition de celui-ci un apport complémentaire des éléments constitutifs du coenzyme, amide nicotinique et adénine, substances que nous avons désignées sous les noms de vitamines B_3 et B_4, en soulignant le rôle complémentaire qu'elles jouent dans le complexe vitaminique B [3].

Les troubles neuromusculaires de l'alcoolisme chronique peuvent être aisément mis en évidence par détermination des chronaxies motrices nerveuses périphériques des nerfs extenseurs et fléchisseurs des orteils et des chronaxies musculaires correspondantes [4]. L'expérience, poursuivie sur des Rats adultes ou préadultes, soumis au régime varié et recevant chaque jour par voie parentérale ou buccale $1^{cm^3},33$ d'alcool à 50^c, montre, en 2 à 3 jours, une diminution des temps d'excitation nerveuse avec égalisation à niveau bas

---

(1) Séance du 4 février 1946.

(2) R. Lecoq, *Bull. Soc. Chim. biol.*, 24, 1942, p. 320 et *Gazette méd. France*, 52, 1945, p. 247.

(3) R. Lecoq, P. Chauchard et H. Mazoué, *Comptes rendus*, 221, 1945, p. 31.

(4) P. Chauchard, H. Mazoué et R. Lecoq, *C. R. Soc. Biol.*, 26 janvier 1946.

(indice d'excitation nerveuse centrale), suivie 3 à 7 jours plus tard d'une augmentation des temps d'excitation musculaire (tableau chronaxique des polynévrites), résultat des agressions répétées des produits acides de la désintégration incomplète de l'alcool éthylique et de l'alcool lui-même. Ces mesures étaient effectuées chaque fois 24 heures environ après l'administration d'alcool afin d'éliminer l'action immédiate transitoire de ce corps.

Comparativement à ce lot témoin, nous avons administré à d'autres lots d'animaux et conjointement à l'alcool éthylique, en injection sous-cutanée ou par ingestion, les vitamines B_1 (aneurine), B_2 (riboflavine), B_3 (amide nicotinique) et B_4 (adénine), sans que l'évolution des troubles chronaximétriques parût modifiée. Réunissant B_1 et B_2, nous avons obtenu des résultats identiques; mais il n'en fut pas de même pour B_3 et B_4. Réalisée préventivement, cette association empêche les troubles neuromusculaires de se manifester. Curativement, elle ramène les chiffres des chronaxies à la normale en 2 ou 4 jours, en dépit de l'imbibition alcoolique régulièrement poursuivie. Une première administration d'une seule des vitamines B_3 et B_4, pratiquée jusque-là sans succès, se trouve corrigée rapidement dans ses effets quand on adjoint la vitamine manquante (amide nicotinique ou adénine), et les résultats restent aussi nets, que les voies d'absorption choisies (injection ou ingestion) soient croisées ou de même sens.

Les doses mises en œuvre quotidiennement pour rétablir l'équilibre chronaximétrique des Rats recevant $1^{cm^3},33$ d'alcool à 50^c (ce qui représentait, suivant leur poids, 5 à 10^g par kilo corporel) correspondaient approximativement à $100\,\gamma$ de vitamine B_3 et $150\,\gamma$ de vitamine B_4.

L'association aneurine, riboflavine, nicotinamide et adénine empêche également l'apparition des troubles neuromusculaires de l'intoxication alcoolique chronique, mais la suppression brusque de B_1 et B_2 est suivie, pendant 2 à 3 jours, d'une chute transitoire des chronaxies nerveuses, temps nécessaire au rétablissement de l'équilibre perturbé. Ce qui laisse à penser que le faisceau des quatre vitamines l'emporte en efficacité sur le simple tandem B_3B_4, la présence de B_1B_2 entraînant une consommation vitaminique *de luxe* qui, à la vérité, n'apparaît pas indispensable.

On conçoit qu'une consommation d'alcool éthylique élevée entraîne chez l'Homme une mobilisation de toutes les quantités de vitamines B_3 et B_4 dont l'organisme peut disposer, et que celles-ci fassent bientôt défaut si les ingestions d'alcool sont fréquemment répétées ; ainsi s'explique l'apparition fréquente chez les sujets alcooliques de troubles pellagreux, ceux-ci étant pour une large part dus à une carence d'amide nicotinique (vitamine B_3, souvent encore désignée sous le nom de vitamine P-P), compliquée d'ailleurs d'autres facteurs pathogéniques ([5]).

([5]) R. Lecoq, *C. R. Soc. Biol.*, 13 octobre 1945.

Conclusions. — L'ingestion ou l'injection répétées d'alcool éthylique suffisent à créer le tableau chronaxique des polynévrites : diminution rapide des chronaxies nerveuses avec égalisation à niveau bas, révélant une atteinte nerveuse centrale, et augmentation des chronaxies musculaires secondaire aux dégénérescences nerveuses.

Les vitamines B_1 (aneurine), B_2 (riboflavine), B_3 (nicotinamide) et B_4 (adénine), données seules, n'apportent aucune modification dans la rapidité d'apparition des troubles neuromusculaires de l'alcoolisme expérimental chronique. L'association B_1 B_2 reste sans effet ; mais la réunion de B_3 et B_4 (nicotinamide et adénine), vitamines qui entrent dans la constitution du coenzyme nécessaire à la désintégration de l'alcool dans l'organisme, prévient ou guérit les troubles nerveux et musculaires décelés chronaximétriquement.

Ces faits confirment le rôle de premier plan joué par le coenzyme dans le métabolisme de l'alcool éthylique et semblent fournir une arme thérapeutique nouvelle utilisable préventivement et curativement dans les petites manifestations nerveuses et musculaires de l'alcoolisme larvé. Ils expliquent en outre comment l'alcoolisme peut devenir facteur de révélation du syndrome pellagreux.

CHIMIE BIOLOGIQUE APPLIQUÉE. — *Influence de l'élimination partielle des matières azotées des moûts de pommes sur la fermentation des cidres. Importance de la* défécation *en cidrerie.* Note de MM. **Jean Tavernier** et **Pierre Jacquin**, présentée par M. Maurice Javillier.

Les praticiens ont remarqué qu'un moût de pommes à cidre ayant subi la *défécation*, ferment eplus lentement et se conserve doux plus longtemps qu'un moût de même provenance n'ayant pas subi la coagulation diastasique des matières pectiques. Nous avons pensé que ce phénomène, considéré jusqu'à présent comme un procédé de clarification et d'épuration microbiologique des moûts, était plus complexe : les matières pectiques coagulées, entraînant dans leur réseau une partie des matières azotées, les insolubiliseraient, appauvrissant ainsi le moût déféqué en azote organique soluble..

Nous avons d'abord précisé les diverses formes des substances azotées du moût de pommes. Pour effectuer ces déterminations, nous avons mis à profit des données classiques : l'azote total, dosé par la méthode Kjeldahl; la fonction aminée, par la méthode de Sörensen; l'azote amidé et l'azote ammoniacal, par la technique de E. Peynaud (1); l'azote albuminoïde, selon E. Voit (2). De nombreuses analyses de moûts de pommes provenant de variétés déterminées brassées à complète maturité, nous permettent de

(1) *Ann. des Falsifications et des Fraudes*, **366**, 1939, p. 228.
(2) *Zeits. Biol.*, **84**, 1926, p. 153.

signaler que la plus grande partie de l'azote organique des moûts de pommes se trouve sous la forme albuminoïde. La teneur en substances azotées d'un moût de pommes est fonction de l'état de maturité des fruits brassés : une variété brassée à maturité physiologique vraie fournit un moût plus pauvre en matières azotées que celui provenant de la même variété brassée avant complète maturité, c'est-à-dire renfermant encore de l'amidon non saccharifié. Le tableau suivant condense ces résultats :

Matières azotées exprimées en mg N/litre.

	Date de cueillette des pommes.					
Variétés.	3 août.	17 août.	1 sept.	14 sept.	27 sept.	5 nov.
Précoce David............	258,1	290,9	217,8	102,2	84,8	
Reine des pommes.......	397,8	371,5	330,2	295,6	257,3	123,6

Pour vérifier notre hypothèse sur la défécation, nous avons effectué de nombreux essais, parmi lesquels nous citerons le suivant : un moût de pommes analysé dès la sortie du pressoir, additionné de 300^{mg} de CO_3Ca et 400^{mg} de NaCl par litre est mis à déféquer en glacière réglée à + 3° afin d'éviter tout départ de fermentation; 48 heures après, les matières pectiques sont coagulées et la rétractation du coagulum obtenue 24 heures plus tard, permet de soutirer le moût déféqué limpide. Soumis à l'analyse, ce moût accuse une perte importante en éléments azotés, notamment en albuminoïdes. Voici les résultats :

	En milligrammes par litre.					
Moût.	N ammoniacal.	N aminé.	N amidé.	N albuminoïde.	N total.	Perte en N total.
Avant défécation (%).......	1,4	33,7	5,8	63,8	104,7	
Après défécation...........	1,4	33,7	5,8	néant	40,9	60,9 %

Conservés à la température de + 13° et à l'abri du contact de l'air, le moût déféqué soutiré et le moût témoin non déféqué entrent spontanément en fermentation. Le dosage des sucres permet de constater une allure différente dans la vitesse de fermentation de ces deux moûts. Dans le moût témoin, la fonction végétative de la levure est favorisée par l'azote albuminoïde, bon aliment de croissance; la levure se multiplie rapidement, puis, la fonction ferment se substituant à la fonction végétative, le moût entre brusquement en fermentation très active. Suffisamment riche en aliments azotés, le moût témoin assure le développement de la levure jusqu'à la transformation complète des sucres en alcool et CO_2. Dans le moût déféqué, la levure-végétal se multiplie lentement par suite de la carence du milieu en azote albuminoïde, et les amino-acides se comportant comme de médiocres aliments de croissance, la fermentation est lente et le cidre conserve une certaine richesse saccharine par suite de sa pauvreté

en aliments azotés totaux. Ainsi les théories sur l'alimentation azotée de la levure sont d'accord avec les faits observés dans la pratique cidricole et permettent de les interpréter.

Conclusions. — Nous avons précisé la composition azotée des moûts de pommes à cidre et signalé l'insolubilisation d'une partie des matières azotées du moût, notamment de l'azote albuminoïde, par la *défécation*.

De notre étude, se dégagent deux notions pratiques :

1° Pour obtenir le minimum de matières azotées dans les moûts, les cidriers ne brasseront que des pommes à complète maturité;

2° La technique cidricole et plus particulièrement la fabrication des cidres doux resteront basées sur la *défécation* qui, par élimination de 40 à 60 % des matières azotées des moûts, permettra d'obtenir des fermentations lentes, par carence d'aliments azotés.

MICROBIOLOGIE. — *Sporulation d'une souche de* Bacillus megatherium *par épuisement soit du fer, soit du carbone, soit de l'azote en milieu synthétique.* Note (¹) de M. **Norbert Grelet**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

L'élaboration, par un organisme, de spores ou autres formes de conservation, dépend de conditions qui la provoquent, et de conditions qui la permettent.

Ainsi *Sterigmatocystis nigra*, poussant à la surface d'un milieu convenable, produit, au bout de quelques jours, des conidies sur sa face exposée à l'air. Mais un milieu où le fer est absent et le zinc présent (²), ou bien un milieu où manque le manganèse (³), donnent lieu à un développement réduit, et ne permettent plus la sporulation.

Pour les Bactéries sporulantes, deux conceptions s'affrontent dans la littérature récente (⁴) à (¹¹) :

Classiquement, depuis Büchner (1890) la sporulation est une réaction à des conditions défavorables du milieu, pénurie de substances utiles, ou accumulation de produits de déchet (⁶);

Au contraire, on s'est souvent attaché à montrer que des conditions défavorables au développement peuvent inhiber également la sporulation (⁷) et (⁸),

---

(¹) Séance du 4 février 1946.

(²) M. Javillier et B. Sauton, *Comptes rendus*, **153**, 1911, p. 1177.

(³) G. Bertrand, *Comptes rendus*, **154**, 1912, p. 381.

(⁴) E. Leifson, *J. of Bact.*, **21**, 1931, p. 330.

(⁵) R. Cook, *Zentralbl. f. Bakt.*, **122**, 1931, I, p. 329.

(⁶) B. C. Brunstetter et C. A. Magon, *J. of Bact.*, **24**, 1932, p. 85.

(⁷) St. Bayne Jones et A. Petrilli, *J. of Bact.*, **25**, 1933, p. 261.

(⁸) F. W. Fabian et C. S. Bryan, *J. of Bact.*, **26**, 1933, p. 543.

ce qui conduit certains ([5]) et ([10]) à présenter la sporulation comme un processus commandé, au bout d'un cycle de division, par des facteurs propres au germe.

Nous nous sommes posé le problème suivant : étant donné un milieu sur lequel un organisme pousse bien sans sporuler, quelles modifications apporter pour déclencher la sporulation ?

Dans un travail antérieur ([12]), nous avons étudié la culture de *Bacillus megatherium*, souche de M. Lemoigne, sur un milieu synthétique, aéré par agitation, permettant à 30° un développement abondant (poids sec, jusqu'à 1300^{mg} pour 100^{cm^3}) :

Ce milieu est ainsi constitué, avec des produits *purs pour analyses* du commerce : pour 100^{cm^3} d'eau de source :

PO_4H_2K	$SO_4Mg, 7H_2O$	$SO_4Mn, 4H_2O$	$SO_4Fe, 7H_2O$	Nitrate	Glucose
500^{mg}	15^{mg}	3^{mg}	3^{mg}	1000^{mg}	6000^{mg}

le pH initial est de 5,2.

Un milieu sans addition de SO_4Fe, un milieu contenant 1500^{mg} de glucose au lieu de 6000, un milieu contenant 100^{mg} de nitrate au lieu de 1000, n'ont donné que des densités bactériennes variant du 1/6 au 1/3 de celles atteintes avec le milieu complet. Il faut noter que le milieu sans addition de SO^4Fe contient certainement un peu de fer, apporté par les produits chimiques et l'eau de source : il permet un certain développement, même au cours de passages successifs.

La souche M, que nous avions conservée jusque-là sous une forme rugueuse, s'étant dissociée, nous avons étudié d'abord la forme rugueuse : elle donne sur moût de bière gélosé des colonies rugueuses en membranes cohérentes, qui sporulent lentement.

Nous avons vérifié que, dans le milieu synthétique riche en fer, glucose et nitrate, la sporulation n'est pas déclenchée : une fois atteintes les densités bactériennes qui semblent correspondre à un maximum, la culture reste stationnaire, mais ne sporule pas tant qu'il reste du glucose.

Au contraire, avec les trois autres milieux, où s'épuisent rapidement le fer, le glucose ou le nitrate, la sporulation accompagne l'arrêt du développement ([13]).

Nous avons vérifié que dans une culture sporulée par épuisement de fer, de glucose ou de nitrate, l'addition de la substance qui manque provoque la germination d'une partie des spores et un nouveau développement. Mais si l'addition

---

([9]) A. J. MANTEUFEL, *Microbiol.* (russe), 9, 1940, pp. 16 et 89; 10, 1941, p. 419.

([10]) A. ZIRONI et E. CARLINFANTI, *Zentralbl. f. Bakt.*, 149, 1943, I, p. 142.

([11]) A. E. HAYWARD, *J. of Bact.*, 45, 1943, p. 200.

([12]) *Annales de l'Institut Pasteur*, 72, 1946, p. 153.

([13]) Des cultures où l'aliment carboné est apporté sous forme de glycérine, d'acide pyruvique ou d'acide acétique, ont sporulé également après épuisement de l'aliment carboné.

du glucose ou de nitrate a lieu au stade où les bâtonnets contiennent des ébauches de spores, le processus n'en continue pas moins et aboutit à la libération des spores, qui germent ensuite si le pH n'est pas devenu trop acide.

Nous pouvons conclure de ces essais que, pour la souche étudiée du *B. megatherium*, un développement abondant, sans sporulation, a lieu dans un milieu synthétique convenable, en présence de fer, de glucose et de nitrate ; par contre, l'épuisement du fer (dans un milieu qui n'en contient pas plus que n'en apportent les impuretés des produits *purs* du commerce ou de l'eau de source), l'épuisement du glucose (ou autre aliment carboné), ou l'épuisement du nitrate, provoquent la sporulation.

A 16^h l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 17^h5^m.

L. B.

ERRATA.

—

(Séance du 19 janvier 1942.)

Note de MM. *Buu-Hoï* et *Paul Cagniant*, Sur une nouvelle famille de composés odorants :

Page 117, ligne 14, intercaler entre $C^{16}H^{22}O$ et E_{9-10} 183-186°... la phrase : E_2 178-180°, ne donne pas de semicarbazone; comme sous-produit, on obtient la 5-méthyl-7-méthoxy α-tétralone... ; ligne 16, *au lieu de* $C^{32}H^{38}$..., *lire* $C^{28}H^{30}$....

(Séance du 11 janvier 1943.)

Note de MM. *Buu-Hoï* et *Paul Cagniant*, Des phénols et quinones dérivés du chaulmoogra :

Dans la formule (VIII), *remplacer* le cycle cyclohexane *par* un cycle cyclopentane.